

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET  
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE DE CONSTANTINE  
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR  
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE



## MEMOIRE DE MAGISTER

Présenté par :

**Mr. Nezzari Hassene**

Option :

**Traitement du Signal**

Thème :

### INTRODUCTION D'UNE FENETRE DE PONDERATION FRACTIONNAIRE ET SON UTILISATION EN FILTRAGE NUMERIQUE RIF

Soutenu le .....

#### DEVANT LE JURY :

<b>Président:</b>	M. BARKAT	Professeur	Université de Constantine
<b>Rapporteur :</b>	A. CHAREF	Professeur	Université de Constantine
<b>Examineurs</b>	A. BENNIA	Maitre de Conférences	Université de Constantine
	N. MANSOURI	Maitre de Conférences	Université de Constantine

*Année: 2005*

# *Résumé*

Dans ce travail on a introduit une nouvelle fenêtre de pondération qu'on a appelé fenêtre fractionnaire dont les caractéristiques dépendent d'un coefficient fractionnaire qui permet de spécifier dans le domaine fréquentiel le compromis entre la largeur du lobe principal et l'amplitude des lobes secondaires. Une caractéristique de cette fenêtre est que son lobe principal et l'amplitudes de ses lobes secondaires dépendent aussi du nombre d'échantillons par contre pour les fenêtres classiques seule la largeur du lobe principale dépend du nombre d'échantillons.

On a aussi trouvé que la bande affaiblie minimale d'un filtre numérique RIF passe-bas utilisant cette fenêtre dépende du coefficient fractionnaire ainsi que du nombre d'échantillons. En plus, pilotant la fenêtre fractionnaire par le paramètre  $\beta = \alpha \cdot N$ , on peut réaliser toutes les fenêtres classiques alors on peut utiliser une seule fenêtre qui répond à toutes les applications voulues. Donc à partir de cette fenêtre, il est possible pour une application voulue de réaliser une fenêtre spécifique qui peut se situer entre deux fenêtres classiques en variant le paramètre  $\beta$  dans le bon sens.

## ملخص

في هذا البحث قمنا بتحديث نافذة تعيين جديدة والتي أطلقنا عليها إسم النافذة الكسرية, حيث أن خصائص هذه النافذة متعلقة بمعامل كسري والذي يسمح بالإختيار بين عرض العمود الرئيسي و طول الأعمدة الثانوية لطيف النافذة. الخاصية التي تميز هذه النافذة هي أن العمود الرئيسي وطول الأعمدة الثانوية لهذه النافذة متعلقان أيضا بعدد العينات. أما في حالة النوافذ العادية فعرض العمود الرئيسي وحده المتعلق بعدد العينات.

وجدنا أيضا أن المرشح الرقمي (RIF) الذي يستخدم هذه النافذة, يتميز بشريط تخامدي متغير بدلالة المعامل الكسري, و يتعلق أيضا بعدد العينات. كما أن النافذة الكسرية تستطيع محاكاة أي نافذة أخرى, وذلك عن طريق تشكيلها بدلالة المعامل  $\beta$  و الذي هو عبارة عن جداء المعامل الكسري وعدد العينات, إذا نستطيع إستعمال نافذة واحدة في جميع التطبيقات. إنطلاقا من هذه النافذة وبتوجيه المعامل  $\beta$  إلى القيمة المحددة, نستطيع إنشاء نافذة لها مميزات بينية لنافذتين كلاسيكيتين, وذلك في الإستعمالات الخاصة.

# *Abstract*

In this work we introduced a new window of weighting which we called fractional window, which the characteristics depend on a fractional coefficient which makes it possible to specify in the frequencies field the compromise between the width of the main lobe and the amplitude of the secondary lobes. A characteristic of this window is that its main lobe and the amplitudes of its secondary lobes also depend on the number of samples on the other hand for the traditional windows only the width of the main lobe depends on the number of samples.

We as found as the minimum stop band attenuation of a low-pass digital filter RIF using this window depends on the fractional coefficient as well as number of samples. Moreover, controlling the fractional window by the parameter  $\beta = \alpha N$ , we can carry out all the traditional windows then we can use only one window which answers all the desired applications. Thus starting from this window, it is possible for a desired application to carry out a specific window, which can be located between two traditional windows by varying the parameter  $\beta$  in the good direction.

## *Dédicaces*

*Je dédie ce travail*

*A mes parents*

*A mon oncle*

*A mes frères et sœurs*

*A tous mes amis*

*Hassene. Nezzari*

## *Remerciements*

Je tiens à remercier vivement mon directeur de mémoire, le **Professeur ABDELATAH CHAREF** d'avoir dirigé ce travail avec compétence et professionnalisme, pour tous ses conseils précieux et sa critique constructive qui ont été très positifs, pour le libre accès à sa documentation personnelle, pour l'intérêt qu'il porte au développement de la recherche, de m'avoir ouvert les portes de son laboratoire et la confiance sans limite qu'il m'a mise en moi, ainsi que toutes les facilités matérielles qu'il m'a accordées pour l'accomplissement de ce travail.

Je tiens à remercier également tous les membres du laboratoire, en particulier **M. BENMALEK** et **M. L. TALBI** pour leur aide et soutien. Je remercie entre autre **F. ABDELLICHE** pour tous les conseils et les explications qu'il m'a prodigués.

Mes vifs remerciements vont au **Professeur M. BARKAT** pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury et également au **Docteur N. MANSOURI** et au **Docteur A. BENNIA** d'avoir accepté de faire partie du jury.

Que toutes les personnes (dont le nombre est très élevé pour les citer ici) qui ont contribué de près ou de loin, directement ou indirectement à ce travail, trouvent ici le témoignage de ma profonde reconnaissance. Enfin je ne pourrais pas terminer ces remerciements sans une pensée à l'ensemble de mes enseignants qui sont à l'origine de tout mon savoir.

# Sommaire

<b>INTRODUCTION GENERALE :</b> .....	01
--------------------------------------	----

## **Chapitre I      TRAITEMENT NUMERIQUE DU SIGNAL**

I.1 Introduction.....	05
I.2 Signaux et systèmes numériques.....	06
I.2.1 Signaux numériques.....	06
I.2.1.1 Définition.....	06
I.2.1.2 Signaux usuelles.....	06
I.2.2 Systèmes numériques.....	07
I.2.2.1 Définition.....	07
I.2.2.2 Propriétés des systèmes.....	07
I.3 Echantillonnage.....	08
I.3.1 Expression d'un signal échantillonné.....	08
I.3.2 Spectre du signal échantillonné.....	08
I.3.3 Théorème de Shannon.....	09
I.4 Représentation fréquentielle.....	09
I.4.1 Transformée de Fourier à temps discret (TFTD).....	09
I.4.2 Transformée de Fourier discrète (TFD).....	10
I.4.3 Relation temps-fréquence.....	10
I.4.3.1 Enregistrement temporels et FFT.....	10
I.4.3.2 Nombre de raies et étendue du domaine spectral.....	11
I.4.3.3 Spectre d'une sinusoïde.....	11
I.5 Transformation en z.....	13
I.5.1 Définition.....	13
I.5.2 Equation aux différences et fonction de transfert.....	13
I.6 Filtrage numérique.....	15
I.6.1 Définition.....	15
I.6.2 Classification des filtres.....	16
I.6.2.1 Filtre à réponse impulsionnelle finie ou filtre RIF.....	16
I.6.2.2 Filtre à réponse impulsionnelle infinie ou filtre RII.....	17
I.6.3 Synthèse des filtre RII.....	17
I.6.4 Synthèse des filtre RIF.....	18

## **Chapitre II      LES FENETRES DE PONDERATION**

II.1 Introduction.....	20
II.2 Fenêtre rectangulaire.....	22
II.2.1 Effet de fenêtrage.....	22
II.2.2 Caractérisation de la fenêtre rectangulaire.....	22
II.2.3 Conclusion.....	24

II.3 Autres fenêtres.....	24
II.3.1 Fenêtre triangulaire.....	25
II.3.2 Fenêtres de Hanning et Hamming.....	27
II.3.3 Fenêtre de Blackman.....	29
II.3.4 Fenêtre de Kaiser.....	29
II.3.5 Récapitulatif des caractéristiques des Fenêtres de pondération.....	31
II.4 Effet du fenêtrage dans l'analyse de Fourier.....	33
II.5 Conception des filtres RIF par la méthode des Fenêtres.....	37

## **Chapitre III                      LA FENETRE FRACTIONNAIRE**

III.1 Introduction.....	41
III.2 Présentation de la fenêtre fractionnaire.....	43
III.3 Etude de la fenêtre fractionnaire.....	44
III.3.1 Les caractéristiques de la fenêtre en fonction de $\alpha$ .....	46
III.3.2 Les caractéristiques de la fenêtre en fonction de N.....	48
III.4 Evaluation de la fenêtre.....	52
III.4.1 Comparaison de la fenêtre fractionnaire.....	52
III.5 L'utilisation de la fenêtre fractionnaire.....	55
III.5.1 L'analyse spectrale.....	55
III.5.2 Le filtrage RIF.....	58
III.6 Conclusion.....	61
<b>CONCLUSION GENERALE</b> .....	<b>62</b>



## *Liste des figures*

<b>Figure</b>	<b>Titre</b>	<b>Page</b>
<b>I.1:</b>	Relation temps-fréquence pour des signaux et spectres numériques.....	12
<b>I.2:</b>	Comparaison des techniques de filtrage.....	16
<b>II.1:</b>	Fenêtre rectangulaire.....	21
<b>II.2:</b>	Caractéristiques spectral de la fenêtre rectangulaire.....	23
<b>II.3:</b>	Fenêtre triangulaire (Bartlett).....	26
<b>II.4:</b>	Fenêtre de Hanning.....	28
<b>II.5:</b>	Fenetre de Hamming.....	28
<b>II.6:</b>	Fenêtre de Blackman.....	30
<b>II.7:</b>	Fenêtre de Kaiser ( $\beta=4.5$ ).....	32
<b>II.8 :</b>	Fenêtre de Kaiser ( $\beta=9$ ).....	32
<b>II.9 :</b>	Signal pondéré par la fenêtre rectangulaire.....	34
<b>II.10:</b>	Signal pondéré par la fenêtre de Hanning.....	34
<b>II.11:</b>	Spectre du signal pondéré par la fenêtre rectangulaire.....	34
<b>II.12:</b>	Spectre du signal pondéré par la fenêtre de Hanning.....	34
<b>II.13:</b>	Signal pondéré par la fenêtre rectangulaire.....	35
<b>II.14:</b>	Signal pondéré par la fenêtre de Hanning.....	35
<b>II.15:</b>	Spectre du signal pondéré par la fenêtre rectangulaire.....	36
<b>II.16:</b>	Spectre du signal pondéré par la fenêtre de Hanning.....	36
<b>II.17:</b>	Filtre RIF conçu par une fenêtre rectangulaire et Hamming.....	38
<b>III.1:</b>	Fonction de distribution de Cole-Cole.....	42
<b>III.2:</b>	Représentation de la fenêtre fractionnaire en fonction de $\alpha$ .....	43
<b>III.3:</b>	L'effet de la longueur de la fenêtre sur sa forme (a) Fenêtre de Hamming (b) Fenêtre de Blackman.....	45
<b>III.4:</b>	Représentation de la fenêtre fractionnaire en fonction de $N$ .....	45
<b>III.5:</b>	L'effet de $\alpha$ sur les caractéristiques spectrales de $w_F$ .....	47
<b>III.6:</b>	Variation des caractéristiques spectrales en fonction de $\alpha$ (a) largeur du lobe central (b) amplitude maximale des lobes secondaires....	48

<b>III.7:</b>	L'influence de N sur la fenêtre fractionnaire.....	49
<b>III.8:</b>	L'influence de N sur la Fenêtre de Hamming.....	49
<b>III.9:</b>	Variation des caractéristiques spectrales en fonction de N.....	50
<b>III.10:</b>	Variation de la largeur de base en fonction de $\beta$ .....	54
<b>III.11:</b>	Variation de la largeur à mi-hauteur en fonction de $\beta$ .....	54
<b>III.12:</b>	Variation de l'amplitude maximale L.S en fonction de $\beta$ .....	55
<b>III.13:</b>	Résolution de deux fréquences proches.....	56
<b>III.14:</b>	Mesure de deux amplitudes différentes.....	56
<b>III.15:</b>	Comparaison de la fenêtre fractionnaire avec les autres fenêtres au mesure des fréquences.....	57
<b>III.16:</b>	Filtres RIF passe-bas d'ordre 25 conçues par la fenêtre fractionnaire.....	59
<b>III.17:</b>	Variation de la bande affaiblie du filtre RIF en fonction de N.....	59
<b>III.18:</b>	Variation de la bande affaiblie du filtre RIF en fonction de $\alpha$ .....	60
<b>III.19:</b>	Filtres RIF conçues par la fenêtre fractionnaire.....	61

## *Liste des tableaux*

<b>Tableau</b>	<b>Titre</b>	<b>Page</b>
<b>II.1:</b>	Fenêtres de pondération.....	31
<b>II.2:</b>	Caractéristiques des fenêtres de pondération .....	39
<b>III.1:</b>	Fenêtre Fractionnaire.....	46
<b>III.2:</b>	Fenêtre Fractionnaire.....	50
<b>III.3:</b>	Fenêtre de Hamming.....	50
<b>III.4:</b>	Caractéristiques de $w_F$ en fonction de $N$ et $\alpha$ .....	51
<b>III.5:</b>	Comparaison des fenêtres usuelles avec la fenêtre fractionnaire.....	52
<b>III.6:</b>	Caractéristiques de $w_F$ en fonction de $\beta$ .....	53
<b>III.7:</b>	Bande affaiblie équivalente du filtre RIF fractionnaire.....	61

## Introduction Générale

Le terme signal sert à désigner une grandeur physique, le plus souvent de nature électrique, comme celle que l'on observe à la sortie d'un microphone. Cette grandeur subit des transformations lors de son passage dans un système. Ainsi, dans une chaîne de communication, le signal est sujet à des modifications (distorsion, affaiblissement, ...) qui peuvent le modifier. Il s'agit de comprendre cette évolution pour pouvoir récupérer dans de bonnes conditions le message initial.

Le signal est le support physique de l'information. Il transporte les ordres dans les équipements de contrôle et de télécommande, il achemine sur les réseaux l'information, la parole ou l'image. Il est particulièrement fragile et doit être manipulé avec beaucoup de soin. Son traitement réunit des théories et des méthodes relativement indépendantes du signal considéré et des moyens technologiques. Les objectifs visés s'étendent de l'extraction de l'information, l'analyse des données, l'amélioration, la synthèse et la compression du signal à sa transmission ainsi qu'à sa segmentation, sa classification. Dans une chaîne intégrée de traitement de l'information, ces objectifs se retrouvent très imbriqués et en interaction complète.

Le traitement du signal apparaît dans de nombreuses applications industrielles, entre autres : télécommunications, traitement des signaux audiofréquence et parole, radar, sonar, vibration, biomédical, imagerie.

En traitement du signal, les techniques numérique offrent des possibilités, prodigieuses : une conception rigoureuse des systèmes, une grande reproductibilité des équipements, une grande stabilité de leurs caractéristiques en exploitation et une remarquable facilité de supervision.

L'essor du traitement numérique date de la découverte de l'algorithmes de calcul rapide de la transformé de Fourier discrète. En effet, cette transformation est à la base de l'étude des systèmes discrets et elle constitue dans le domaine numérique l'équivalent de la transformée de Fourier dans le domaine analogique, c'est le moyen de passage de l'espace temporel discret à l'espace fréquentiel discret.

L'enregistrement ou le traitement en ligne, des signaux représentant le phénomène étudié ont une durée limitée. L'appareillage ou l'ordinateur dans le cas d'un traitement

différé, impose un temps fini au signal ou au prétraitement, on est toujours amené à travailler avec un nombre fini de points. Cela revient à dire que les signaux exploités numériquement sont toujours une troncature de signaux réels.

La manière simple de limiter la durée d'un signal est de le multiplier par un signal rectangulaire, possédant  $N$  échantillons. Un tel signal est souvent appelé fonctions de pondération ou plus simplement fenêtres temporelles. Cette opération s'appelle fenêtrage. Au départ, deux problèmes apparaissent pour effectuer le produit du signal et de la fenêtre. Le premier est la position de cette fenêtre par rapport au signal et le second est le choix de  $N$ . Pour positionner la fenêtre, le signal particulier doit être connu. Toutefois, en règle générale, la position de la fenêtre est choisie de manière à conserver les échantillons importants du signal et à négliger ceux qui sont d'amplitude relativement petite. Au niveau fréquentiel, le fait de tronquer un signal peut notablement affecter son spectre. La conséquence principale est que les pics s'affaissent et s'élargissent. Selon la fenêtre de pondération choisie, on privilégiera soit la résolution (largeur des pics), soit la mesure (hauteur des pics).

La fenêtre rectangulaire ou naturelle est trop brutale et on lui préfère d'autres fenêtres plus douces. Dans la littérature, plusieurs fenêtres ont été proposées pour réduire les effets de la troncature. Dans le but d'améliorer les fenêtres de pondération, on cherche toujours à modifier deux paramètres principaux, le premier est la largeur du lobe principal; le second est l'amplitude maximale des lobes secondaires. Une bonne fenêtre est caractérisée par un lobe principal étroit et des lobes secondaires de faibles amplitudes. Le problème qui se pose est que l'amélioration d'un de ces paramètres conduit à la détérioration de l'autre. Le choix d'une fenêtre est fait selon la nature du signal à étudié ou l'application désirée.

Dans le travail réalisé, on a introduit une nouvelle fenêtre de pondération qu'on a appelé fenêtre fractionnaire. Une étude de cette fenêtre est faite et les caractéristiques obtenues sont comparées à celles des fenêtres existantes, dans le but d'utiliser cette dernière dans diverses applications et particulièrement en filtrage numérique RIF. Les travaux présentés dans ce mémoire sont exposés en trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré à la représentation de certaines notions fondamentales ainsi que les principaux outils de traitement du signal tel que TFTD, TFD et les filtres RIF.

Le deuxième chapitre est organisé en trois parties. La première partie est une représentation des fenêtres de pondération les plus utilisées. Dans la deuxième partie on

présente des exemples d'analyse utilisant les fenêtres de pondérations, en précisant la résolution et la mesure des fréquences comme exemple. La troisième partie est réservée à la conception des filtres numériques RIF par la méthode de fenêtrage.

Le troisième chapitre est consacré à la nouvelle fenêtre de pondération. Ce chapitre est aussi partagé en trois parties. La première est consacrée à l'exposition de la fenêtre fractionnaire, dont on présente l'aspect temporel et fréquentiel. La deuxième étape est consacrée à l'évaluation de la fenêtre, avec une comparaison de ses caractéristiques avec celles des fenêtres usuelles. Finalement la mise en œuvre de la fenêtre fractionnaire par des exemples d'utilisations, deux applications sont simulées, la première pour l'analyse spectrale et la deuxième pour la conception des filtres RIF, une comparaison des résultats obtenus avec ceux des fenêtres usuelles.

# Traitement numérique du signal

## **I.1 Introduction**

Le traitement du signal concerne la représentation, la transformation, la manipulation des signaux et de l'information qu'ils contiennent.

A l'origine les divers traitements que l'on effectue sur les signaux sont basés sur des techniques et des dispositifs analogiques. Bien que le progrès continu en traitement analogique c'est surtout le domaine du traitement numérique qui a connu une évolution considérable.

Au début cette évolution a été parallèle au développement de l'ordinateur, mais les possibilités offertes par l'ordinateur lui-même en permet d'utiliser des méthodes de traitement de plus en plus complexes, généralement irréalisable par voie analogique. Ces méthodes de traitement exigent à leurs tours des ordinateurs encore plus puissants et ceci a conduit au développement de traitement numérique des signaux.

Le traitement numérique du signal désigne l'ensemble des opérations, calcul arithmétique et manipulation des nombres, qui sont effectués sur un signal traité représenté par une suite de nombres en vue de fournir une autre suite de nombre qui représente le signal traité.

Les fonctions les plus variées sont réalisables de cette manière, comme l'analyse spectrale, le filtrage, la modulation, la détection, l'estimation et l'extraction des paramètres.

Les systèmes de traitement numérique obéissent aux lois des systèmes discrets ou échantillonnés, les nombres manipulés sont issus d'un processus discret ou souvent des signaux continus échantillonnés.

## I. 2 Signaux et systèmes numériques

### I.2.1 Signaux numériques

#### I.2.1.1 Définition

Un signal discret est un signal dont la variable indépendante (le temps) est une variable discrète (les instants sont multiples entiers d'une durée  $T_e$ ).

Un signal numérique est un signal discret dont l'amplitude est discrète c'est à dire, chaque échantillon est quantifié (les amplitudes sont multiples entiers d'une quantité  $q$ )

#### I.2.1.2 Signaux usuelles

Parmi l'infinité de séquences que l'on peut imaginer, il y en a quelques-unes qui sont fondamentales pour l'analyse des signaux et des systèmes[1]. Ce sont :

a) L'impulsion unité définie par :

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } k=0 \\ 0 & \text{si } k \neq 0 \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Un aspect important de cette séquence est qu'elle peut servir à définir n'importe quelle autre séquence. En effet, toute séquence peut être considérée comme une somme d'impulsions décalées  $\delta[k-n]$  et d'amplitude  $x[n]$ . La suite  $x[k]$  peut donc être décrite par l'expression suivante :

$$x[k] = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \cdot \delta[k-n] \quad (\text{I.2})$$

b) Echelon unité défini par

$$u[k] = \begin{cases} 1 & \text{si } k \geq 0 \\ 0 & \text{si } k < 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad u[k] = \sum_{l=-\infty}^k \delta[k-l] \quad (\text{I.3})$$

Inversement, l'impulsion unité peut être décrite par la différence de deux échelons unités :

$$\delta[k] = u[k] - u[k-1]$$

c) Signal exponentiel

$$x[k] = a^n \quad (\text{I.4})$$

d) Signal sinusoidal

$$x(k) = A \sin \left[ \frac{2\pi}{N} (k - k_0) \right] \quad (\text{I.5})$$

$N \equiv$  période du signal (nombre entier)



## I.2.2 Systèmes numériques

### I.2.2.1 Définition

Un système numérique est une fonction ou un algorithme prédéfini qui opère sur un signal numérique (appelé l'entrée ou l'excitation) et qui produit un autre signal numérique nommé la sortie ou la réponse du système.

Un tel système est défini mathématiquement comme un opérateur ou une transformation qui modifie une séquence d'entrée  $x[k]$  en une séquence de sortie  $y[k]$ . On peut représenter cette transformation par un opérateur  $F$  tel que  $y[k] = F\{x[k]\}$  et en donner l'équation ou son schéma fonctionnel.

### I.2.2.2 Propriétés des systèmes

Suivant leurs propriétés, on peut classer les systèmes de la façon suivante :

#### 1. *Système statique*

Un système statique ou sans mémoire est un système dont la sortie  $y[k]$  ne dépend que du signal d'entrée à l'instant  $k$ . Par exemple :

$$y[k] = ax[k] + k\{x[k]\}^2 \quad (\text{I.6})$$

#### 2. *Système dynamique*

Un système tenant compte de ce qui s'est passé ou se passera est dit dynamique ou avec mémoire :

$$y[k] = \frac{1}{3}(x[k-1] + x[k] + x[k+1]) \quad (\text{I.7})$$

#### 3. *Système linéaire*

Un système linéaire satisfait au principe de superposition :

$$\begin{aligned} y[k] &= F\{ax_1[k] + bx_2[k]\} \\ &= aF\{x_1[k]\} + bF\{x_2[k]\} \\ &= y_1[k] + y_2[k] \end{aligned} \quad (\text{I.8})$$

#### 4. *Système invariant dans le temps*

Un système invariant dans le temps est un système pour lequel un décalage temporel sur le signal d'entrée conduit à un signal de sortie simplement décalé de la même valeur :

$$\text{pour } F\{x[k]\} = y[k] \quad (\text{I.9})$$

$$\text{alors } F\{x[k+d]\} = y[k+d] \quad (\text{I.10})$$

### 5. Système causal

Un système est causal si la séquence de sortie ne dépend que des valeurs actuelles ou passées de la séquence d'entrée.

### 6. Système stable

Un système est stable si, quelle que soit la séquence d'amplitude finie appliquée à l'entrée, sa sortie ne devient pas infiniment grande.

## I.3 Echantillonnage

Les signaux réels utilisés en physique sont de plus en plus souvent traités de façon numérique. Pour cela, il est nécessaire d'utiliser l'opération d'échantillonnage.

### I.3.1 Expression d'un signal échantillonné.

On considère un signal  $x(t)$  continu que nous allons échantillonner, en prenant une valeur aux instants  $k.T_e$ . Le signal échantillonné sera noté  $\hat{x}(t)$ .

Pour représenter mathématiquement le signal  $\hat{x}(t)$ , on va supposer que ce dernier est équivalent à une somme d'impulsions rectangulaires étroites (largeur  $T_e$ ), centrées sur les instants  $k.T_e$  et d'amplitude  $x(k.T_e)$ . Chacune de ces impulsions peut être représentée par une impulsion de Dirac, elle aussi centrée sur  $k.T_e$  et d'amplitude égale à l'aire des impulsions. On arrive donc à l'expression[2]

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} T_e x(k.T_e) \delta(t - k.T_e) = x(t) T_e \cdot \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - k.T_e) = x(t) T_e \cdot \Pi(t) \quad (\text{I.11})$$

où  $\Pi(t)$  est le peigne de Dirac.

### I.3.2 Spectre du signal échantillonné.

Le spectre du signal échantillonné va être obtenu à partir du produit de convolution du signal analogique par le spectre du peigne de Dirac. Ce qui donne

$$\hat{X}(f) = T_e X(f) \otimes \Pi(f) = X(f) \otimes \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - nf_e) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f) \otimes \delta(f - nf_e) \quad (\text{I.12})$$

$$\hat{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} X(f - nf_e) \quad (\text{I.13})$$

On constate donc qu'en échantillonnant le signal à la fréquence  $f_e$ .

### I.3.3 Théorème de Shannon.

Pour reconstituer un signal analogique  $x(t)$  à partir de ces échantillons, il faut que la fréquence d'échantillonnage  $f_e$  soit supérieure à 2 fois la fréquence maximale  $f_m$  contenue dans le spectre de ce signal soit  $f_e \geq 2f_m$ . Le filtrage permettant de retrouver  $x(t)$  sera d'autant plus aisé que  $f_e$  est supérieur à  $2f_m$ .

Pour reconstruire un signal  $x(t)$  à partir de ses échantillons, dans le cas où le critère de Shannon est satisfait, il suffit de multiplier, dans le domaine spectral, le spectre du signal échantillonné par une fenêtre de largeur  $f_e$  centrée sur 0 et d'amplitude 1. Cela revient à dire que, dans le domaine temporel, le signal  $x(t)$  est obtenu par un produit de convolution de la fonction échantillonnée et d'un sinus cardinal. On trouve alors

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_e) \frac{\sin[\pi f_e (t - kT_e)]}{\pi f_e (t - kT_e)} \quad (\text{I.14})$$

## I.4 Représentation fréquentielle

L'étude fréquentielle d'un signal a pour objet sa représentation comme somme de sinusoides. Ainsi, pour évaluer l'importance de la composante  $\cos(2\pi f_0 k)$  à la fréquence  $f_0$  dans le signal  $x(k)$ , la première idée est d'effectuer le produit scalaire entre  $x(k)$  et  $\cos(2\pi f_0 k)$ . C'est ce que réalise la transformée de Fourier à temps discret, comme le fait la transformée de Fourier pour les fonctions à temps continues[3].

En pratique on est confronté à l'évaluation de la transformée de Fourier à temps discret sur calculateur numérique. Or celle-ci s'avère irréalisable, ne serait-ce qu'en raison du fait que, dans sa définition[4], la fréquence est à valeurs dans l'intervalle continu  $(0, 1)$ .

### I.4.1 Transformée de Fourier à temps discret (TFTD)

Par définition, la transformée de Fourier à temps discret d'une suite  $\{x(k)\}$  est la fonction de  $f$ , périodique de période 1 :

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k) e^{-2j\pi kf} \quad (\text{I.15})$$

C'est une fonction à fréquence continue. Il est d'usage de la représenter sur les intervalles  $(-1/2, +1/2)$  ou  $(0,1)$ , du fait de sa périodicité.

On déduit la formule inverse :

$$x(k) = \int_{-1/2}^{1/2} X(f) e^{2j\pi kf} df \quad (\text{I.16})$$

### I.4.2 Transformée de Fourier discrète (TFD)

Le calcul sur ordinateur de la TFD à partir de la valeur des échantillons de  $x(k)$  impose une charge de calcul infinie puisque la série comporte un nombre infini de termes et que la fréquence  $f$  varie continûment sur l'intervalle  $(0,1)$ . C'est la raison pour laquelle la notion de transformée de Fourier discrète a été introduite[5]. Son calcul est limité à un nombre fini de valeurs de  $k$  et à un nombre fini de valeurs de  $f$ . Son intérêt pratique est très largement dû à la découverte d'une méthode de calcul rapide connue sous le nom de la transformée de Fourier rapide ou TFR[6].

La TFD est définie par la relation suivante :

$$X(n) = \sum_{k=0}^{N-1} x(k) e^{-2j\pi kn/N} \quad n \in \{0, \dots, N-1\} \quad (\text{I.17})$$

La formule inverse est :

$$x(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} X(n) e^{2j\pi nk/N} \quad k \in \{0, \dots, N-1\} \quad (\text{I.18})$$

### I.4.3 Relations temps-fréquence

La transformation rapide de Fourier est un algorithme permettant le passage entre les domaines temporel et fréquentiel et que la FFT échantillonne dans le temps et la fréquence (figure I.1). Les équations qui relient ces deux espaces sont

$$\Delta f = 1/T \quad (\text{I.19})$$

$$f_{\max} \equiv f_e = 1/\Delta t \equiv 1/T_e \quad (\text{I.20})$$

où

- $T$  est la durée de l'enregistrement temporel ;
- $\Delta t$ , l'incrément temporel ou la période d'échantillonnage  $T_e$  ;
- $N$ , le nombre de points enregistrés ;
- $f_e$ , la fréquence d'échantillonnage ;
- $\Delta f$ , l'incrément fréquentiel.

#### I.4.3.1 Enregistrements temporels et FFT

Un enregistrement temporel est défini comme une suite de valeurs  $x[k]$  également espacées. Pour des raisons de rapidité de l'algorithme FFT, le nombre  $N$  de valeurs enregistrées doit être une puissance de 2. Comme le montre la figure 1, cet enregistrement est considéré comme un bloc complet qui est transformé en un autre bloc : le spectre de raies. Tous les échantillons de l'enregistrement doivent donc être présents avant de calculer

les raies spectrales. On notera qu'il n'y a pas de correspondance d'échantillons temporels à raies spectrales mais seulement de bloc temporel à bloc spectral.

Puisque la FFT transforme la totalité du bloc temporel, il ne peut pas y avoir de résultat spectral avant d'avoir enregistré un bloc de  $N$  échantillons. Cependant, dès que ce bloc a été obtenu, on peut éliminer le premier échantillon et en introduire un nouveau. Ainsi, une fois le premier bloc traité, les blocs suivants peuvent être analysés à chaque période d'échantillonnage et permettre ainsi de voir l'évolution du spectre au cours du temps.

#### I.4.3.2 Nombre de raies et étendue du domaine spectral

Un enregistrement (ou un bloc temporel) de durée  $T$  est constitué de  $N$  échantillons également espacés. La FFT transforme ces échantillons en  $N$  raies spectrales également distantes l'une de l'autre dans le domaine fréquentiel. Comme chaque raie spectrale contient deux informations distinctes, l'amplitude et la phase, toute l'information est contenue dans la moitié des raies spectrales calculées par la FFT.

On considère donc que dans la bande spectrale analysée qui s'étend de 0 à  $f_e/2$ , il y a  $N/2$  raies spectrales complexes dont on peut calculer le module et l'argument ou, l'amplitude et la phase du signal analysé. La fréquence qui limite le domaine d'analyse est désignée sous le nom de fréquence de Nyquist

$$f_N = f_e/2 \quad (\text{I.21})$$

La plus petite fréquence que l'on peut obtenir avec la FFT dépend directement de la durée  $T$  de l'enregistrement. On a en effet

$$\Delta f = 1/T \quad (\text{I.22})$$

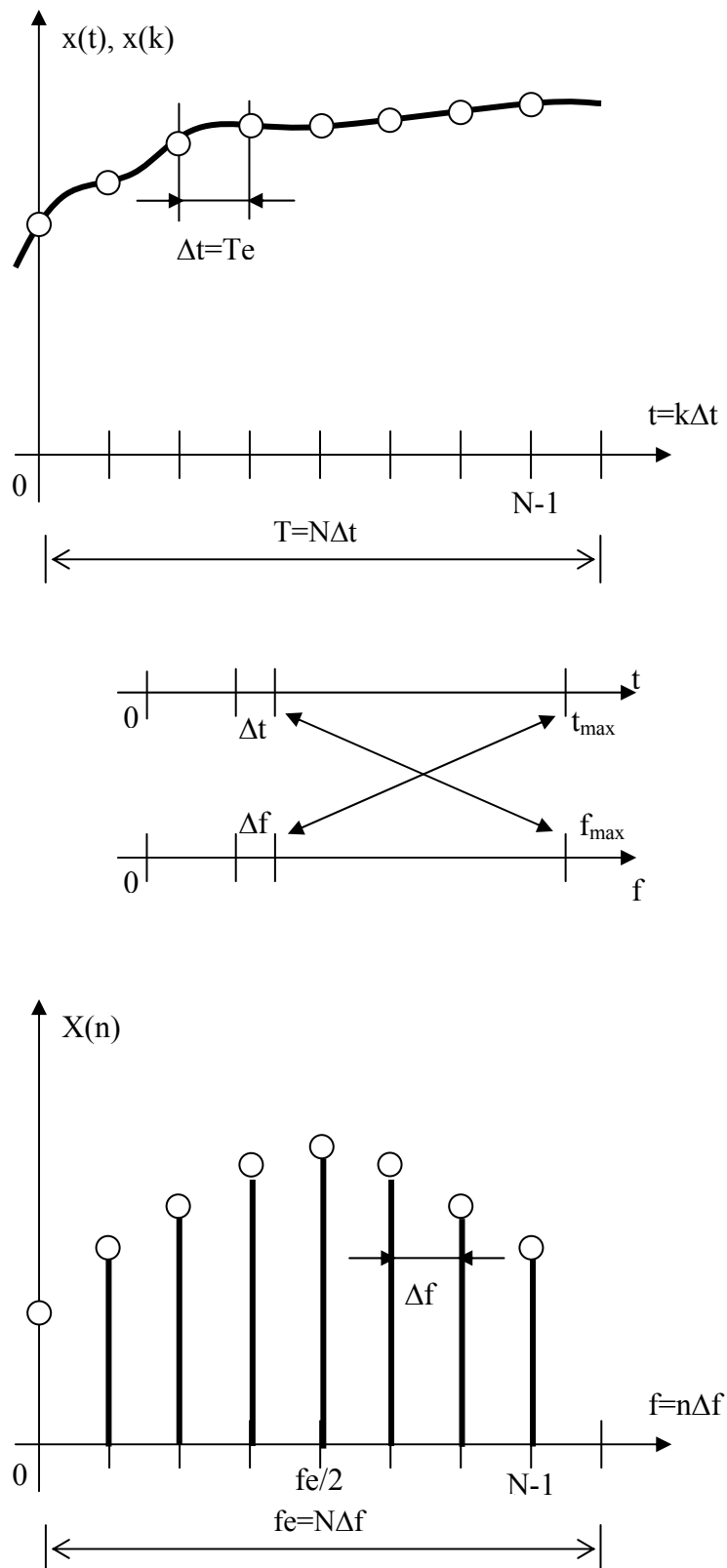
Le signal enregistré étant considéré par la FFT comme périodique de période  $T$ , il s'ensuit que les raies spectrales seront espacées de cette valeur  $\Delta f$ . De plus, si le signal possède une valeur moyenne non nulle, on aura une raie spectrale à  $f = 0$  correspondant à la composante continue du signal enregistré. Enfin les incréments temporel et fréquentiel sont reliés entre eux par la relation

$$\Delta t \cdot \Delta f = 1/N \quad (\text{I.23})$$

#### I.4.3.3 Spectre d'une sinusoïde

Il est important de bien comprendre que dans toute analyse numérique des signaux, on est contraint d'enregistrer une durée finie du signal et que cette durée finie peut conduire à des effets indésirables lors de l'analyse.

Puisque la FFT travaille sur un bloc complet d'échantillons considéré comme périodique. Cela ne pose aucun problème dans le cas d'un signal transitoire si celui a le temps de revenir à 0 avant la fin de l'enregistrement. Par contre, dans le cas de signaux permanents



**Figure (I.1):** Relations temps-fréquence pour des signaux et spectres numériques

tel qu'une sinusoïde, les choses peuvent se compliquer sensiblement. Pour le voir, considérons deux situations.

Si on coupe le signal sur un laps de temps proportionnel à sa période (en général inconnue), il n'y aura pas de perturbation. Dans ce cas, le signal enregistré, considéré périodique par la FFT, coïncide avec le signal réel (une sinusoïde permanente) et aucune modification de l'information n'est introduite. mais si on le coupe à des intervalles de temps différents, le signal sera perturbé, la fonction sera discontinue à ses extrémités. Dans ce cas, la FFT analyse un signal qui possède une transition brusque au raccordement du début et de la fin de l'enregistrement. Cette transition possède un contenu spectral hautes-fréquences qui peut masquer une partie du spectre réel.

Pour éviter ces effets de bords, il faut s'attacher à enregistrer exactement un nombre entier de périodes du signal. Dans le cas où cela n'est pas possible, il faut ramener les deux bords à une valeur identique, c'est le rôle des fenêtres de pondération (§II.4), qui modifie aussi peu que possible le spectre.

## I.5 Transformation en $z$

### I.5.1 Définition

La transformation en  $z$  fait pour les systèmes numériques ce que la transformation de Laplace fait pour les systèmes continus. En particulier, elle permet la représentation des systèmes numériques linéaires à l'aide d'une fonction de transfert  $H(z)$  dont les pôles sont les racines de l'équation caractéristique.

La transformation en  $z$  s'applique à une suite de nombres  $x[k]$  au travers de la définition suivante [7] :

$$X(z) = Z\{x[k]\} = \sum_{k=0}^{+\infty} x[k] z^{-k} \quad (\text{I.24})$$

### I.5.2 Equation aux différences et fonction de transfert

Un système pouvait être décrit par une équation aux différences d'ordre  $N$  :

$$y[k] + \sum_{i=1}^N a_i y[k-i] = \sum_{i=0}^M b_i x[k-i] \quad (\text{I.25})$$

On notera au passage que l'ordre  $M$  de la partie non-homogène de l'équation n'est pas nécessairement égal à celui de la partie homogène.

Utilisant la propriété de linéarité, la transformation en  $z$  de l'équation aux différences se calcule aisément et donne :

$$Y(z) + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i} Y(z) = \sum_{i=0}^M b_i z^{-i} X(z) \quad (I.26)$$

En mettant en évidence les termes qui ne dépendent pas de l'indice  $i$ , il vient :

$$Y(z) \left( 1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i} \right) = X(z) \sum_{i=0}^M b_i z^{-i} \quad (I.27)$$

Le rapport des grandeurs de sortie  $Y(z)$  et d'entrée  $X(z)$  définit la fonction de transfert  $H(z)$

:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^M b_i z^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^N a_i z^{-i}} \quad (I.28)$$

ou bien, en développant les deux sommes :

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}} \quad (I.29)$$

En multipliant numérateur et dénominateur par  $z^N$ , cette fonction de transfert peut encore s'écrire sous la forme équivalente :

$$H(z) = \frac{b_0 z^N + b_1 z^{N-1} + \dots + b_M z^{N-M}}{z^N + a_1 z^{N-1} + \dots + a_N} \quad (I.30)$$

On remarque alors que le dénominateur de  $H(z)$  n'est autre que l'équation caractéristique de l'équation aux différences représentant le système :

$$p^N + a_1 p^{N-1} + \dots + a_N = 0$$

La recherche des pôles de  $H(z)$  est donc équivalente à la recherche des racines de l'équation caractéristique.

La réponse fréquentielle du système s'obtient simplement en remplaçant l'opérateur de retard  $z^{-1}$  par son équivalent dans la transformation de Fourier  $e^{-j\Omega}$  :

$$H(j\Omega) = \frac{b_0 + b_1 e^{-j\Omega} + \dots + b_M e^{-jM\Omega}}{1 + a_1 e^{-j\Omega} + \dots + a_N e^{-jN\Omega}} \quad (I.31)$$

La variable  $\Omega \equiv 2\pi f T_e$  est la pulsation normalisée comprise entre  $+\pi$  et  $-\pi$  et elle représente la fréquence comprise entre  $+fe/2$  et  $-fe/2$ .



## I.6 Filtrage numérique

### I.6.1 Définition

L'appellation de filtrage fait penser aux opérations qui sont effectuées dans le domaine analogique. Si l'on compare les filtres analogiques et numériques, on peut observer des analogies et des différences :

- Analogie de comportement : c'est par analogie avec les filtres analogiques que l'on conçoit les filtres numériques et c'est à leurs réponses en amplitude et en phase que l'on compare celles des filtres numériques, tout au moins dans un premier temps.
- Différence fondamentale de structure : les filtres numériques sont implantés sur des processeurs standards ou dédiés (processeurs de traitement du signal) ; à cet égard il est bon de rappeler que l'utilisation d'un micro-ordinateur n'a de sens que si les phénomènes mis en jeu ne sont pas trop rapides. Si la rapidité est trop importante, il faut utiliser des cartes spécialisées avec processeur de traitement du signal. On peut noter que la notion de structure doit être comprise dans le sens d'algorithme et pas seulement dans le sens de structure de réalisation matérielle.

Un filtre numérique est constitué d'un groupement de circuits logiques astreints à un processus de calcul (ou algorithme) qui confère à ce filtre une fonction déterminée (passe-bas, passe-haut, passe-bande, réjecteur de bande, intégrateur, différentiateur, ...). Le calcul porte sur une séquence (ou suite) de nombres introduites à son entrée et fournit une séquence numérique modifiée, c'est-à-dire "filtrée" ou traitée, à sa sortie. La plupart des modèles de filtres analogiques peuvent ainsi être reproduits sous forme numérique. Les éléments physiques (résistance, capacité, inductance, amplificateurs opérationnels) sont en quelque sorte transposés en éléments logiques.

L'avantage majeur des processeurs de traitement du signal réside dans la rapidité des traitements (multiplication hard) ce qui permet de les utiliser pour des applications industrielles temps réel.

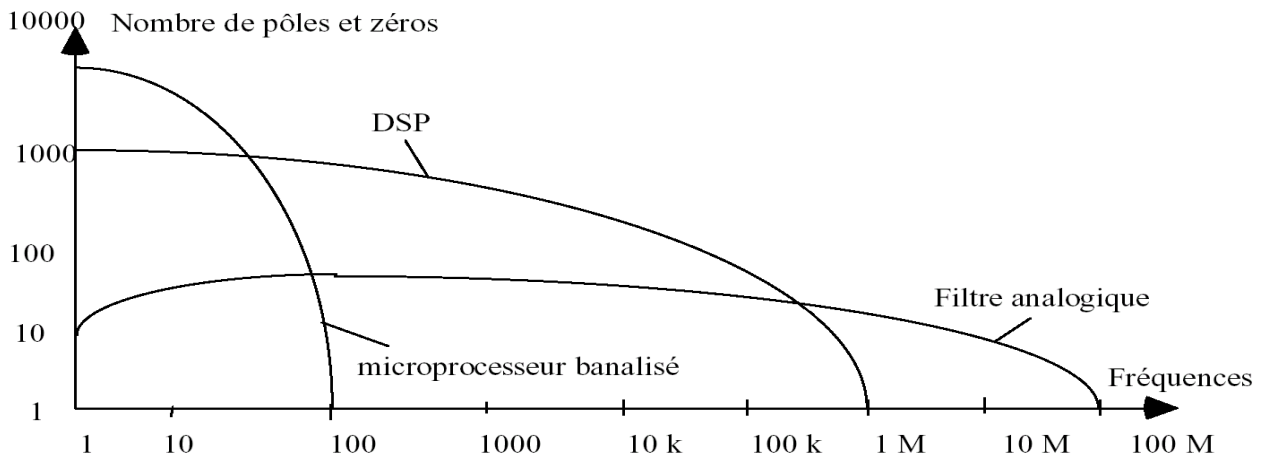


Figure (I.2) : Comparaison des techniques de filtrage

La courbe ci-dessus donne les performances comparées de filtres numériques conçus à partir de techniques différentes et du filtre analogique.

Comme on peut le constater, le filtrage analogique couvre une gamme de fréquences beaucoup plus large, mais se trouve limité en nombre de singularités (c'est la richesse en pôles et en zéros qui détermine la "raideur" d'un filtre).

**I.6.2 Classification des filtres**

On peut classifier les filtres en deux larges catégories selon la durée de la réponse impulsionnelle du filtre. Ces deux catégories sont les suivantes [8] :

**I.6.2.1 Filtre à réponse impulsionnelle finie ou filtre RIF**

Ces filtres sont caractérisés par les réponses impulsionnelles de durée finie. Dans ce cas les échantillons  $h(k)$  sont non nulle sur un intervalle de durée finie N seulement.

Un filtre RIF est représenté par une équation au différence comme suit :

$$\sum_{i=0}^n a_i y(k-i) = \sum_{i=0}^m b_i x(k-i) \tag{I.32}$$

avec  $n=0$  et  $m=N-1$

alors

$$a_0 y(k) = \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(k-i)$$

$$a \neq 0 \Rightarrow y(k) = \frac{1}{a_0} \left[ \sum_{i=0}^{N-1} b_i x(k-i) \right] \tag{I.33}$$

et sa fonction de transfert est donnée par :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{a_0} \left[ \sum_{i=0}^{N-1} b_i z^{-i} \right] \tag{I.34}$$

### I.6.2.2 Filtre à réponse impulsionnelle infinie ou filtre RII

Ces filtres sont caractérisés par des réponses impulsionnelles de durée infinie. Autrement dit les échantillons  $h(k)$  sont non nulle sur un intervalle infini.

Un filtre RII est représenté par une équation aux différences comme suit :

$$\sum_{i=0}^n a_i y(k-i) = \sum_{i=0}^m b_i x(k-i) \quad \text{avec } n \neq 0 \quad (\text{I.35})$$

et sa fonction de transfert est donnée par :

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i z^{-i}}{\sum_{i=0}^n a_i z^{-i}} \quad (\text{I.36})$$

Une deuxième classification permet de distinguer entre les divers types de mise en œuvre d'un filtre pour effectuer l'opération de filtrage. On peut distinguer deux classes :

**-Filtres discrets non-récurrents** c à d des filtres sans boucle de contre réaction.

**-Filtres discrets récurrents** c à d des filtres avec au moins une boucle de contre réaction.

### I.6.3 Synthèse des filtres RII

L'approche de conception des filtres RII implique la transformation d'un système continu à un système discret, en satisfaisant les spécifications désirées.

Les spécifications pour les deux systèmes sont en général données dans le domaine fréquentiel.

Soit  $H_c(p)$  la fonction de transfert d'un système linéaire invariant dans le temps continu et  $h_c(t)$  sa réponse impulsionnelle, alors

$$TF\{h_c(t)\} = H_c(p=j\Omega) = H_c(j\Omega) \quad (\text{I.37})$$

En échantillonnant  $h_c(t)$  avec une période  $T_e$ , en vérifiant le critère d'échantillonnage.

$$\text{Donc} \quad h_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_c(kT_e) \delta(t - kT_e) \quad (\text{I.38})$$

$$\text{alors} \quad H_s(j\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h_c(kT_e) e^{-j\Omega T_e k} \quad (\text{I.39})$$

$$\text{On a} \quad h(k) = h_c(kT_e) \quad \text{et} \quad H_d(z) = Z\{h(k)\}$$

$$\text{alors} \quad TF\{h(k)\} = H_d(z=e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h(k) e^{-j\omega k} \quad (\text{I.40})$$

On peut conclure que

$$H_d(e^{jw}) = H_s(j\Omega) \quad \text{pour } w = \Omega T \Rightarrow \Omega = \frac{w}{T_e} \quad (\text{I.41})$$

$$\text{On sait que } H_s(j\Omega) = \frac{1}{T_e} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} H_c(j\Omega - j\Omega_s k); \quad \text{avec } \Omega_s = 2\pi f_s = \frac{2\pi}{T_e} \quad (\text{I.42})$$

comme  $H_s(j\Omega)$  est un spectre périodique de période  $\Omega_s$  alors pour  $|\Omega| < \Omega_s/2 = \pi/T_e$  on a

$$H_s(j\Omega) = \frac{1}{T_e} H_c(j\Omega)$$

$$\text{Donc } H_d(e^{jw}) = H_s\left(j\frac{w}{T_e}\right) = \frac{1}{T_e} H_c\left(j\frac{w}{T_e}\right) \quad \text{pour } \left|\frac{w}{T_e}\right| < \frac{\pi}{T_e} \Rightarrow |w| < \pi \quad (\text{I.43})$$

Comme  $1/T_e$  est une constante on peut écrire :

$$H_d\left(e^{j\frac{w}{T_e}}\right) \quad \text{pour } |w| < \pi$$

$$H_d(e^{jw}) = H_c(j\Omega) \quad \Omega = \frac{w}{T_e} \text{ et } |w| < \pi \quad (\text{I.44})$$

On peut utiliser toute les technique analogique pour calculer  $H_c(p)$  qui satisfait les spécifications désiré, puis utilisant une technique de transformation des domaines continus aux domaines discrets pour calculer  $H_d(z)$  qui satisfait les spécifications des filtres numériques désirés.

### I.6.5 Synthèse des filtre RIF

Un filtre RIF possède une fonction de transfert polynomiale. Il ne peut pas être obtenu par transposition d'un filtre continu, comme cela est fait pour le filtres RII.

Les filtres RIF présentent l'inconvénient de nécessiter un grand nombre de coefficients pour obtenir les mêmes caractéristiques fréquentielles. Mais par contre, ils sont inconditionnellement stables.

On peut synthétiser des filtres RIF à phase linéaire (temps de propagation constant pour tout fréquence), c'est-à-dire à temps de phase linéaire : temps de propagation constant pour tout fréquence.

Les méthodes qui permettent de déterminer les coefficients de la fonction de transfert font appel à des techniques basées sur les séries de Fourier ou à des techniques itératives d'optimisation.

#### Méthode de la fenêtre

La méthode de la fenêtre permet de réaliser, à partir d'une réponse en fréquence idéale, la synthèse de filtres à réponse impulsionnelle finie. Cette réalisation conduit toujours à des ondulation parasites de la réponse en fréquence. Son principal intérêt est la simplicité du calcul des coefficient. Cette méthode sera décrit par la suite (§II.5).

## Les fenêtres de pondération

### II. 1 Introduction

Que ce soit dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel, une fonction fenêtre est créée chaque fois qu'il y a limitation volontaire ou non de la durée d'observation, d'enregistrement ou d'utilisation d'un signal. Cette opération s'appelle fenêtrage.

En effet, en numérique, il n'est pas possible d'effectuer des opérations sur un nombre infini de points. Il est alors nécessaire de tronquer la durée d'observation ou de l'enregistrement.

Dans le domaine temporel, les temps d'acquisition des signaux numériques sont limités, c'est-à-dire, que la portion du signal acquis et traité est définie sur une durée finie.

Cette connaissance limitée du signal équivaut à le multiplier par une fonction fenêtre temporelle dite fenêtre rectangulaire représentée par :

$$w_R(k) = \begin{cases} 1 & ; 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & ; \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{II. 1})$$

La fonction  $W_R(f)$ , est la transformée de Fourier de la fenêtre rectangulaire et appelée *fenêtre spectrale*.

$$W_R(f) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j2\pi f k} = e^{-j\pi f(N-1)} \frac{\sin \pi f N}{\sin \pi f} \quad (\text{II. 2})$$

Cette troncature de signaux infinis pour l'obtention de signaux de durée finie entraîne des effets indésirables.

Un signal tronqué est donc la multiplication d'un signal de durée infinie par une fenêtre rectangulaire c'est à dire:

$$x_N(k) = x(k)w_R(k) = \begin{cases} x(k) & ; 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & ; \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{II. 3})$$

Cette multiplication temporelle se traduit dans le domaine fréquentiel par une convolution entre le spectre du signal  $x(k)$  et celui de la fenêtre rectangulaire.

alors :

$$X_N(f) = X(f) * W_R(f) = \int X(\tau) W_R(f - \tau) d\tau \quad (\text{II. 4})$$

Par conséquent le spectre de  $x_N(k)$  sera différent du spectre du signal  $x(k)$ .

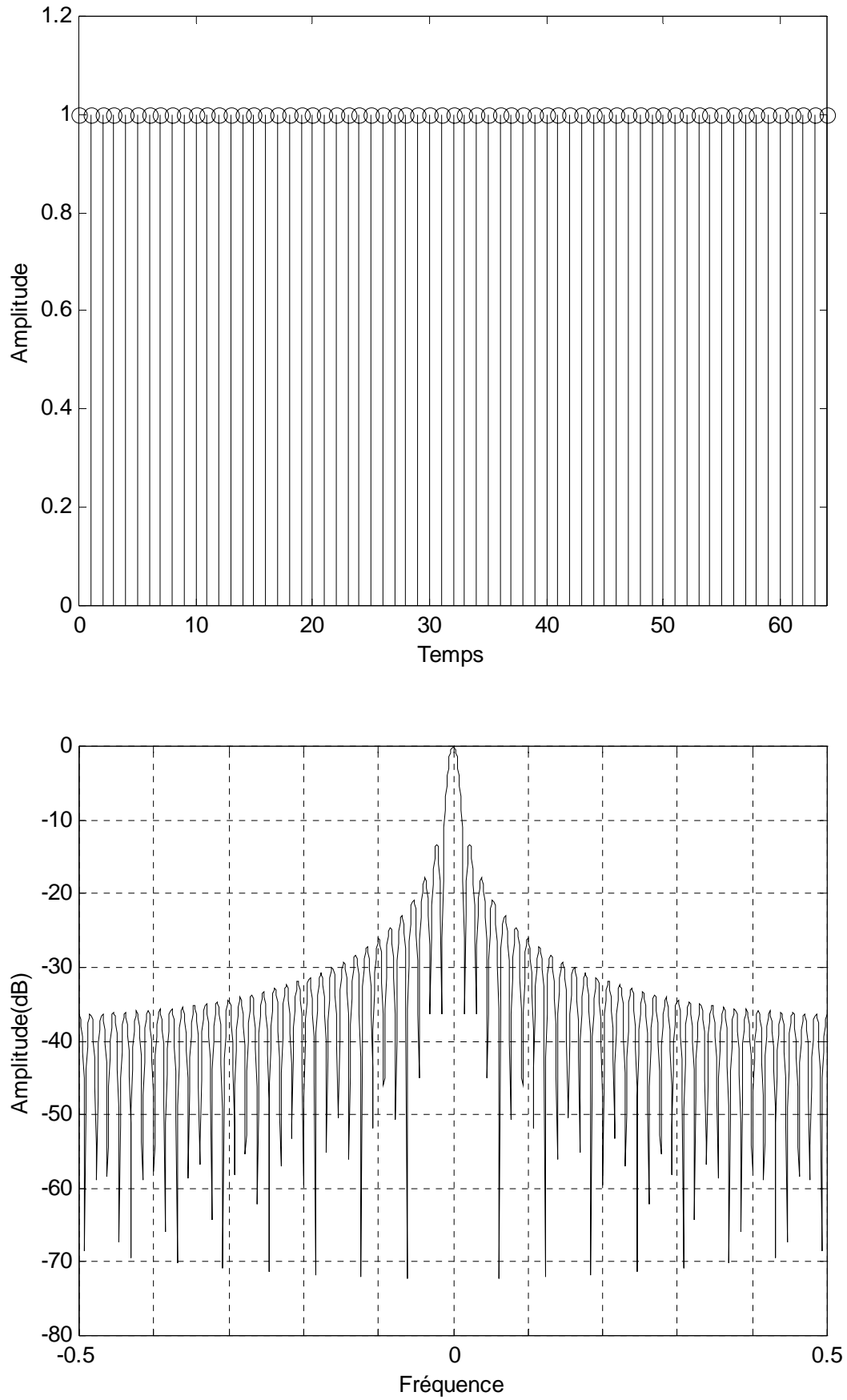


Figure (II. 1) : Fenêtre rectangulaire

## II. 2 Fenêtre rectangulaire

### II. 2. 1 Effet de fenêtrage

Le traitement analogique ou numérique d'un signal de durée finie ou tronqué conduit à une déformation. Dans le cadre de la TFD, le signal est obligatoirement limité aux  $N$  échantillons numériques avec lesquels la TFD est calculée, c'est-à-dire à une durée  $N T_e$  ;  $T_e$  est normalisée à l'unité. Cet effet est donné par la relation suivante :

$$x_N(k) = x(k) \cdot w_R(k) \quad (\text{II. 5})$$

et donc un spectre en fréquence donné par :

$$X_N(f) = X(f) * \left( \frac{\sin(\pi N f)}{\pi N f} \right) \quad (\text{II. 6})$$

Dans le cas d'un signal périodique, le spectre obtenue par transformée de Fourier discrète, est donc un ensemble de fonctions  $\text{sinc}(Nf)$  centrées sur les fréquences qui composent le signal théorique initial. Ainsi cette qualité du résultat peut être inconmode pour l'étude du spectre, en particulier lorsque le spectre est composé de nombreuses raies, proches les unes des autres.

### II. 2. 2 Caractérisation de la fenêtre rectangulaire

Le spectre de la fenêtre rectangulaire est défini sur l'intervalle principal  $[-1/2, 1/2]$ , d'un lobe central et des lobes secondaires. Deux paramètres principaux permettent de les caractériser. Le premier est la largeur de base du lobe central qui est donné par :

$$L_b = C \cdot f_e / N \quad (\text{II. 7})$$

où  $C$  est une constante caractérisant chaque fenêtre ( $C_R=2$ ), et  $f_e$  est la fréquence d'échantillonnage généralement normalisée à l'unité.

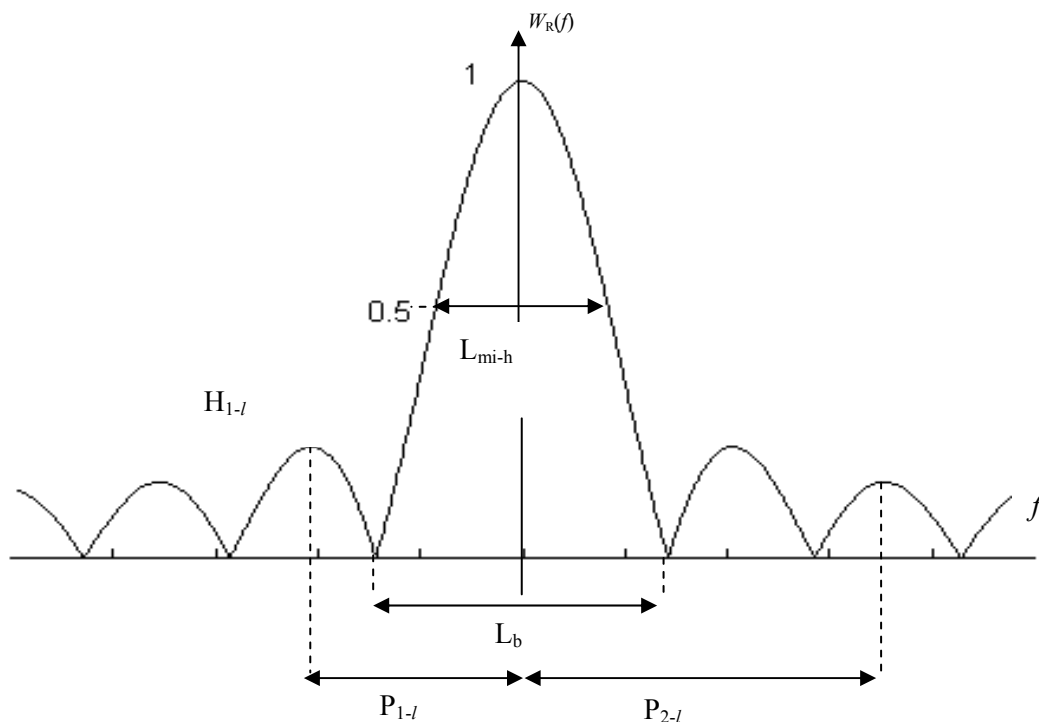
Le second est le rapport de l'amplitude maximale des lobes secondaires et celle du lobe central. Ce dernier est exprimé en décibel de la manière suivante :

$$A_R = 20 \log_{10} \left| \frac{W_R(f_i)}{W_R(0)} \right| \quad (\text{II. 8})$$

où  $f_i$  est la fréquence au milieu du lobe secondaire de la fonction  $W_R(f)$ . Par exemple, dans le cas où  $N=9$ , on a :

$$A_R = 20 \log_{10} \frac{1}{4.5} \cong -13 \text{ dB}$$

D'autres paramètres peuvent être extraits du spectre de la fenêtre pour son évaluation. Les paramètres les plus utilisés sont obtenus de la figure suivante [9].



**Figure II. 2 :** Caractéristiques spectral de la fenêtre rectangulaire

-la largeur de base du lobe central Eq (II. 7) :

-La largeur à mi-hauteur du lobe principal :

$$L_H = \frac{L_{mi-h}}{2} \cdot N \quad (\text{II. 9})$$

-L'amplitude maximale des lobes secondaires par rapport à celle du lobe principal généralement normalisé à 1 :

$$A = \frac{H_{1-l}}{H=1} \quad (\text{II. 10})$$

-Les positions des deux premiers lobes secondaire par rapport à la position du lobe central :

$$P_1 = P_{1-l} \cdot N \text{ et } P_2 = P_{2-l} \cdot N \quad (\text{II. 11})$$

En effet les déformations spectrales obtenues sont directement liées au spectre de la fenêtre utilisée. Il serait souhaitable que les déformations obtenues soient moins importantes :

- Largeur à mi-hauteur du lobe principal  $L_H$  la plus petite possible ;
- L'amplitude relative  $A$  du premier lobe secondaire la plus faible possible ;
- Les position  $P_{1-l}$  et  $P_{2-l}$  des deux premiers lobes secondaire les plus éloignés possibles.



### II. 2. 3 Conclusion

La troncature fait apparaître des oscillations dans le spectre de  $x_N(k)$  et même si on augmente le nombre de points  $N$  de troncature, seule la fréquence des ces oscillations augmente sans pour autant diminuer leurs amplitudes.

Pour réduire l'effet de la fenêtre rectangulaire, les signaux sont parfois multiplié par d'autres fenêtres, dont les spectre doivent présenter un pic centrale étroit et de lobes secondaires de trais faible amplitude. Dans la majorité des cas la fenêtre rectangulaire est trop brutale et on lui préfère d'autres fenêtres plus douces[10], aux conséquences fréquentielles moins désastreuses.

### II. 3 Autres fenêtres

De nombreuses études ont été réalisées afin d'obtenir des fenêtres de pondération minimisant la déformation spectrales, c'est à dire possédant un spectre plus proche des caractéristiques souhaitées [11].

Prenant la fenêtre naturelle comme référence, le lobe central des fenêtres usuelles est élargi, mais les oscillations sont réduites ; tout se passe comme si en utilisant une fenêtre dont on a resserré le lobe central, on avait fait 'fuir' une partie de l'énergie dans des lobes secondaires oscillants. ce phénomène est dit de 'fuite spectrale' (*spectral leakage*) [12].

Globalement, la compacité du point fréquentiel y gagne de façon très importante, car l'élargissement du lobe central est en général acceptable ( un facteur 2 à 3 usuellement), mais une réduction de 2 à 4 ordres de grandeurs pour l'amplitude des oscillations.

On peut remédier à cette situation en modifiant la forme de la fonction fenêtre tout en conservant la même ouverture de durée  $N$ . Toutefois, pour ne pas introduire un facteur multiplicatif d'échelle dans le produit de convolution (II. 4), l'intégrale sur une période de la fenêtre spectrale doit être l'unité. Cette condition s'exprime par :

$$\int_{-1/2}^{1/2} W(f) df = 1 \quad (\text{II. 12})$$

Or, cette intégrale est la valeur à l'origine du signal correspondant. En effet, d'après la définition de la transformation de Fourier, on a :

$$W(0) = \int_{-1/2}^{1/2} W(f) df = 1 \quad (\text{II. 13})$$

Cette condition est implicitement satisfaite pour la fonction fenêtre rectangulaire  $w_R(k)$ .

Nous représentons ici les principales fenêtres [12],[13], avec leur expressions  $w(k)$  et leur caractéristiques (Tableau I.1):

### II .3. 1 Fenêtre triangulaire

Dans le but de diminuer l'amplitude des lobes secondaires du spectre  $W_R(f)$  de la fenêtre rectangulaire, une autre fonction fenêtre dite fenêtre triangulaire ou de *Bartlette* est introduite comme suit :

$$w_T(k) = \begin{cases} \frac{k}{N/2} & \text{pour } 0 \leq k \leq N/2 \\ w_{N-k} & \text{pour } N/2 \leq k \leq N-1 \end{cases} \quad (\text{II. 14})$$

La raison de ce choix réside dans le fait qu'on peut exprimer  $w_T(k)$  comme le produit de convolution d'une fenêtre rectangulaire de durée  $N/2$  par elle-même. Dans le domaine fréquentiel, ceci correspond à un produit simple de la transformée de Fourier de cette fenêtre rectangulaire par elle-même qui est en fait son carré. Lorsque la fonction (II. 2) est élevée au carré, le rapport  $A_T$  de la fonction  $W_T(f)$  indique une atténuation de -25 dB qu'il faut comparer à  $A_R = -13$  dB. La fonction fenêtre triangulaire est exprimée mathématiquement par :

$$w_T(k) = \frac{2}{N} \text{rect}_{N/2}(k) * \text{rect}_{N/2}(k) \quad (\text{II. 15})$$

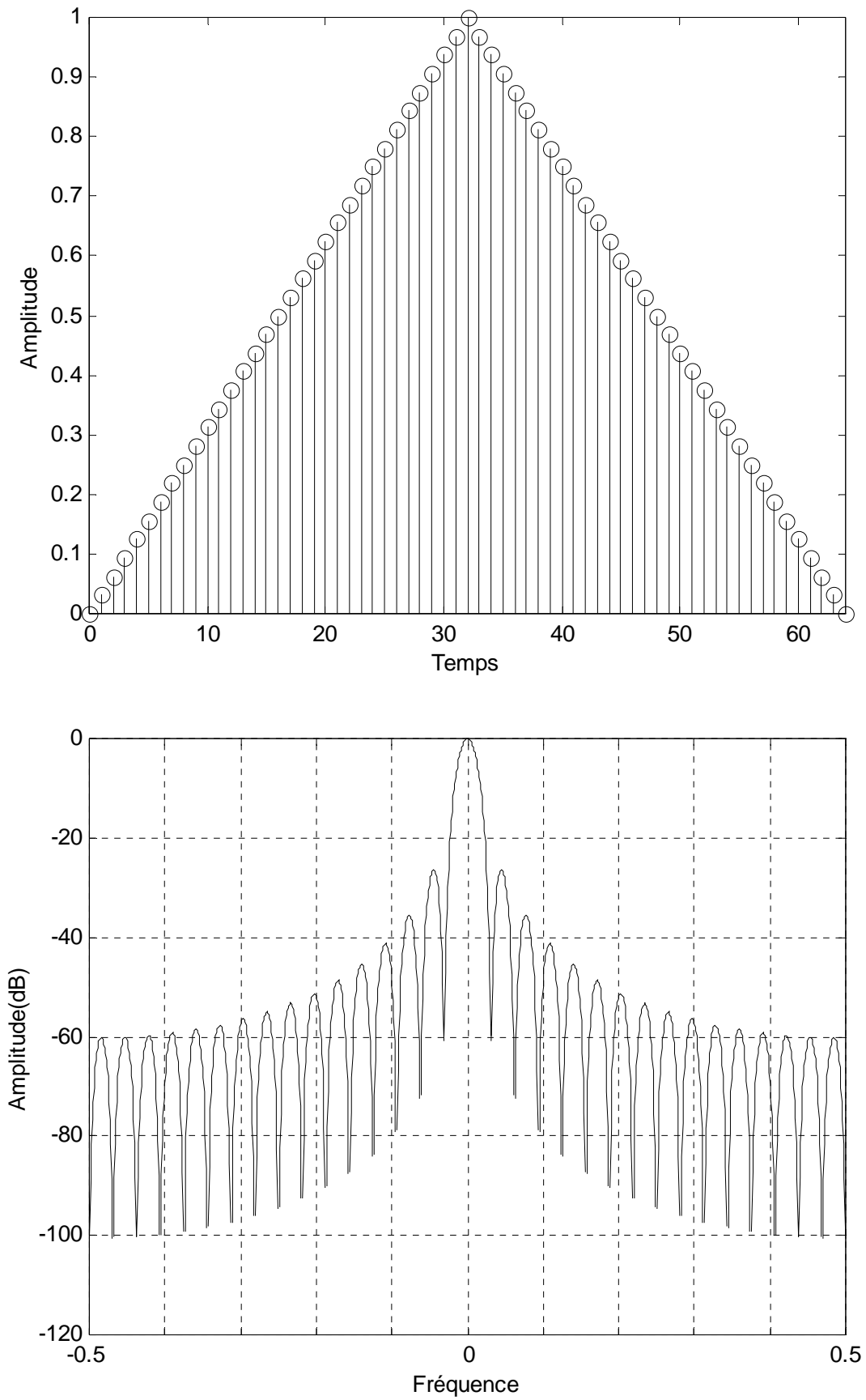
Le facteur  $2/N$  provient de la condition (II. 12). Dans le domaine fréquentiel, on a :

$$W_T(f) = e^{-j2\pi(N/2-1)f} \left( \frac{\sin \pi f N/2}{\sin \pi f} \right)^2 \quad (\text{II. 16})$$

Une seule restriction d'importance mineure apparaît dans les relations (II.15) et (II.16). Comme  $N/2$  représente un nombre d'échantillons sur la fonction rectangulaire  $\text{rect}_{N/2}(k)$ , ce nombre doit être entier. Ainsi,  $N$  doit être un nombre pair dans les équations (II.15) et (II.16). Malgré ceci, la symétrie de la fenêtre  $w_T(k)$  par rapport à l'origine n'est pas détruite[14]. La figure II.3 illustre le produit de convolution (II.15) et la fonction  $W_T(f)$ .

La comparaison des fonctions  $W_R(f)$  et  $W_T(f)$  représentées avec les mêmes échelles sur les figures II.1 et II.3 respectivement montre clairement l'atténuation des lobes secondaires. Toutefois, ceci est obtenu au prix de l'élargissement du lobe central.

En effet, la largeur de base du lobe central de la fonction  $W_T(f)$  est de  $4/N$ .



Figure(II. 3) : Fenêtre triangulaire (Bartlett)

### II. 3. 2 Fenêtres de Hanning et Hamming

L'étape suivante dans le raffinement de l'atténuation des lobes secondaires par superposition est de faire recouvrir trois répliques de la même transformé décalées par pas de  $1/N$  et avec un poids double au centre. La fonction fenêtre. Correspondant à ces superpositions dans le domaine fréquentiel, est donnée par :

$$\begin{aligned} w_h(k) &= \frac{1}{4} \left[ 2 - \exp\left(j\frac{2\pi k}{N}\right) - \exp\left(-j\frac{2\pi k}{N}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left( 1 - \cos\frac{2\pi k}{N} \right) \quad \text{pour } 0 \leq k \leq N-1 \end{aligned} \quad (\text{II. 18})$$

Comme précédemment,  $w_h(k)$  est identiquement nul en dehors de l'intervalle  $[0, N-1]$ . Cette fonction fenêtre est connue sous le nom de *Hanning*. On peut généraliser la fenêtre  $w_H(k)$  avec un paramètre  $\alpha$  de la manière suivante :

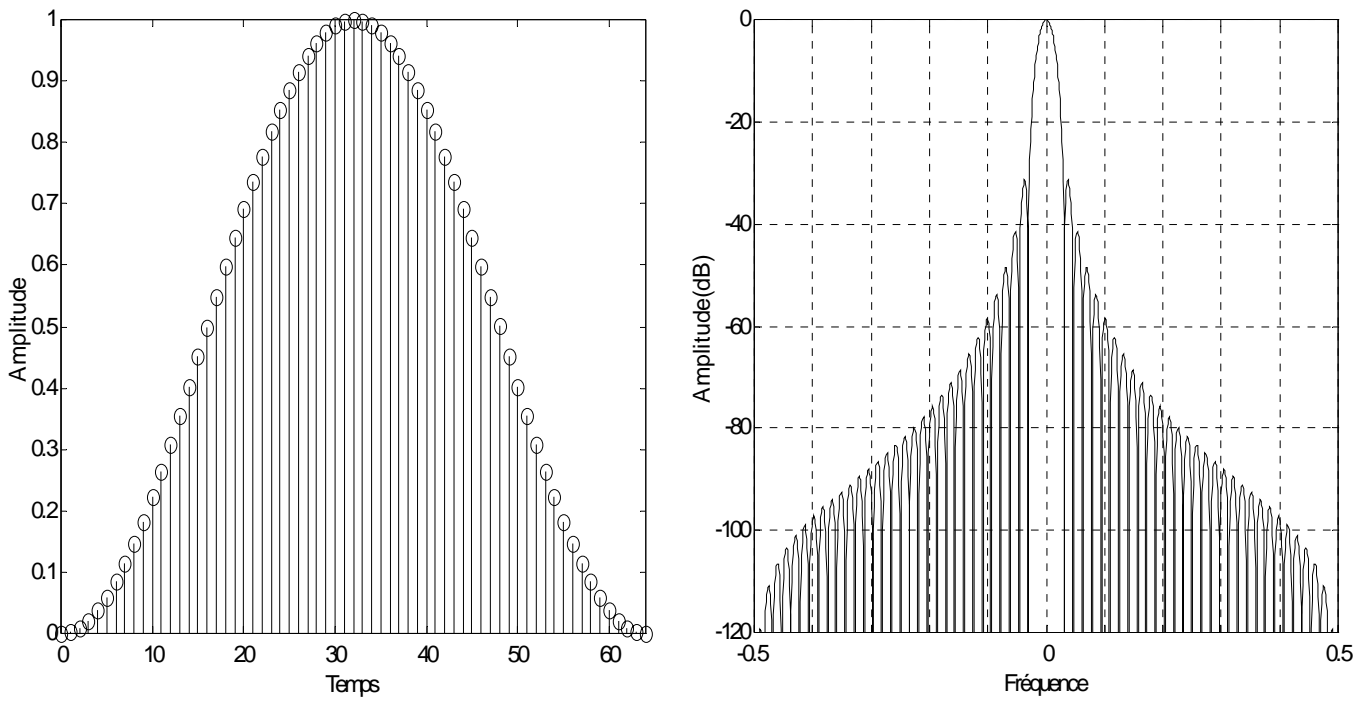
$$w_H(k) = \begin{cases} \alpha - (1-\alpha) \cos(2\pi k/N) & \text{pour } 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{II. 19})$$

La forme générale (II.19) est appelée fonction fenêtre de Hamming généralisée. Pour  $\alpha=1/2$ , on obtient la fenêtre de Hanning, si  $\alpha=0.54$ , la fenêtre obtenue s'appelle fenêtre de Hamming. Il faut remarquer également que la valeur  $\alpha=1$  correspond à la fonction fenêtre rectangulaire.

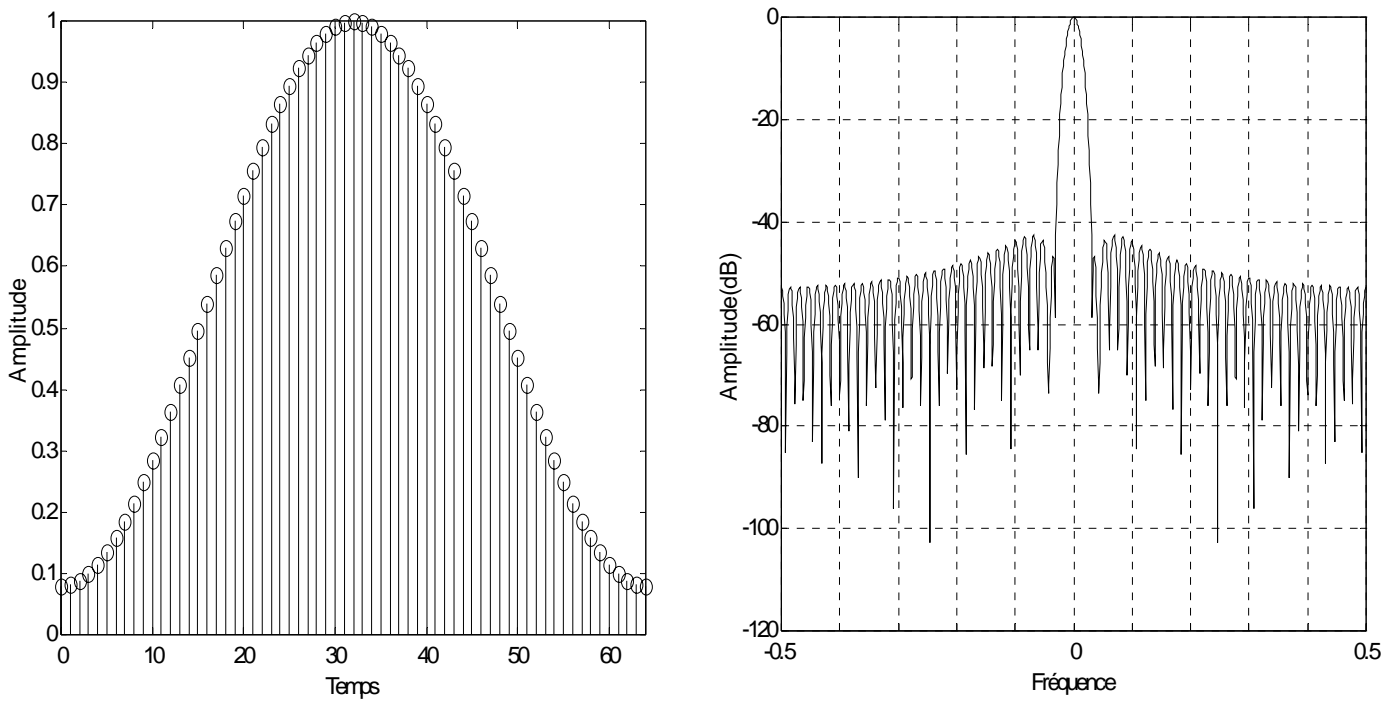
La transformée de Fourier de la fenêtre de Hamming généralisée peut être aisément calculée en exprimant  $w_H(k)$  comme le produit d'un signal cosinusoidal et d'une fenêtre rectangulaire plus une fenêtre rectangulaire. En effectuant, dans le domaine fréquentiel, le produit de convolution périodique correspondant, on obtient :

$$W_H(f) = \alpha W_R(f) + \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) W_R(f-1/N) + \left(\frac{1-\alpha}{2}\right) W_R(f+1/N) \quad (\text{II. 20})$$

Pour  $\alpha \neq 1$ , la fonction  $W_H(f)$  est obtenue par la superposition de trois répliques de la fonction  $W_R(f)$  décalées par pas de  $1/N$ . Cette superposition produit un lobe central dans la fonction  $W_H(f)$  dont la largeur de base est  $4/N$ , quel que soit  $\alpha$  dans l'intervalle  $0 \leq \alpha < 1$ . L'atténuation des lobes secondaires peut également être mesurée par le rapport  $A_H$ , qui est dans ce cas, dépend aussi de  $\alpha$ . La fenêtre de Hanning ( $\alpha=1/2$ ) conduit à un rapport  $A_h$  qui vaut -31 dB. Pour la même valeur de  $N$ , la fenêtre de Hamming avec  $\alpha=0.54$  conduit à  $A_H = -41$  dB. Ceci montre l'énorme atténuation obtenue du premier lobe secondaire. Le poids  $\alpha=0.54$  permet d'atténuer ce lobe, mais les autres lobes secondaires ne sont pas atténués de la même manière. Ils sont à environ -41 dB du lobe central.



Figure(II. 4) : Fenêtre de Hanning



Figure(II. 5) : Fenêtre de Hamming

### II.3. 3 Fenêtre de Blackman

On peut également généraliser la construction de fenêtre par superposition en cherchant à recouvrir  $M$  répliques de la même transformée décalée par pas de  $1/N$  avec des poids judicieusement choisis. Pour conservé la symétrie des répliques décalées par rapport à l'origine,  $M$  doit être un nombre impaire. Dans le domaine temporel, la forme général de la fenêtre correspondant à ces  $M$  superpositions est la suivante :

$$w_B(k) = \begin{cases} a_0 + 2 \sum_{l=1}^L a_l \cos \frac{2\pi kl}{N} & \text{pour } 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{II. 21})$$

où  $L = (M-1)/2$ . Les coefficients  $a_l$  doivent satisfaire la condition

$$a_0 + 2 \sum_{l=1}^L a_l = 1 \quad (\text{II. 22})$$

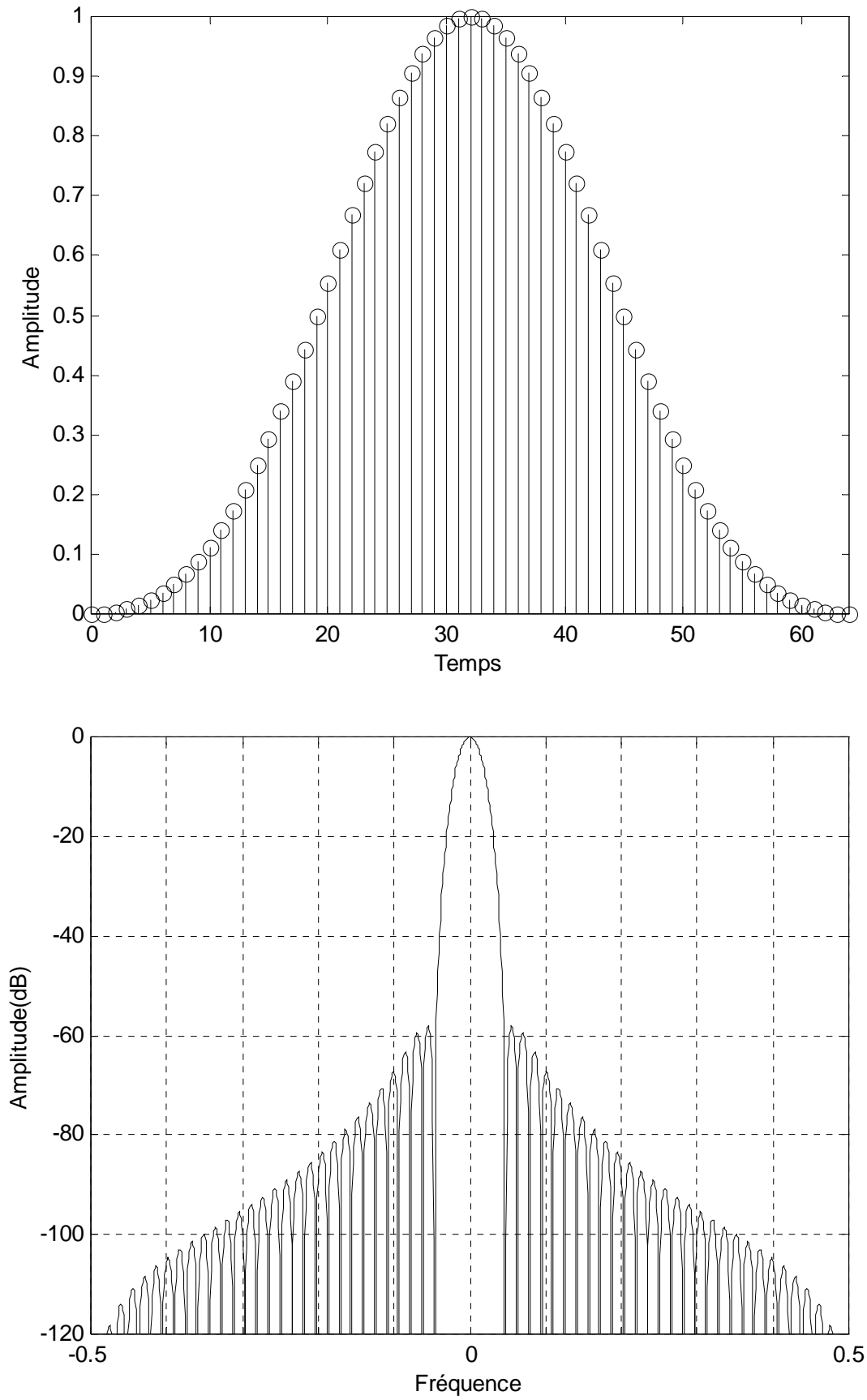
Pour éviter un facteur multiplicatif. La transformée de Fourier de la fenêtre  $w_B(k)$  peut être calculée comme dans le cas de la fenêtre  $w_H(k)$ . On obtient :

$$W_B(f) = a_0 W_R(f) + \sum_{l=1}^L a_l W_R(f-1/N) + \sum_{l=1}^L a_l W_R(f+1/N) \quad (\text{II. 23})$$

Les valeurs des coefficients  $a_l$  sont obtenues par optimisation selon un critère donnée. En principe, le critère est de minimiser l'énergie du signal  $w_B(k)$  en dehors d'un intervalle de fréquence donnée. Cet intervalle correspond en général à la largeur de base du lobe central de  $W_B(f)$ . La fonction fenêtre  $w_B(k)$  est appelée *fonction fenêtre de Blackman généralisée*. La fonction fenêtre obtenue dans le cas particulier  $L=2$  est appelée *fenêtre de Blackman*. Cette dernière est caractérisée par les poids  $a_0=0.42$ ,  $a_1=0.25$  et  $a_2=0.04$ . La transformée de Fourier de la fenêtre de Blackman ( $L=2$ ) possède un lobe central dont la largeur de base est  $6/N$ . Le rapport  $A_B$  correspondant est d'environ  $-57$  dB.

### II.3. 4 Fenêtre de Kaiser

Une autre famille de fonctions fenêtre a été proposé par Kaiser. Elle permet, selon la valeur d'un paramètre  $\beta$ , de spécifier dans le domaine des fréquences le compromis entre la largeur du lobe central et l'amplitude des lobes secondaires. Une caractéristique importante de cette famille raffinée de fenêtres est qu'il est possible d'obtenir de fortes atténuations des lobes secondaires tout en conservant une largeur minimale pour le lobe principal. La forme général de cette fenêtre est la suivante :



**Figure(II. 6) : Fenêtre de Blackman**

$$w_k(k) = \begin{cases} \frac{I_0 \left[ \beta \sqrt{N^2 - 4(k - (N/2))^2} \right]}{I_0(\beta N)} & \text{pour } 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (\text{II. 24})$$

où  $I_0$  est la fonction de Bessel modifier d'ordre zéro et  $\beta$  le paramètre caractérisant l'échange d'énergie entre le lobe principal et les lobes secondaires.

$$I_0(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left( \frac{(x/2)^m}{m!} \right)^2 \quad (\text{II. 25})$$

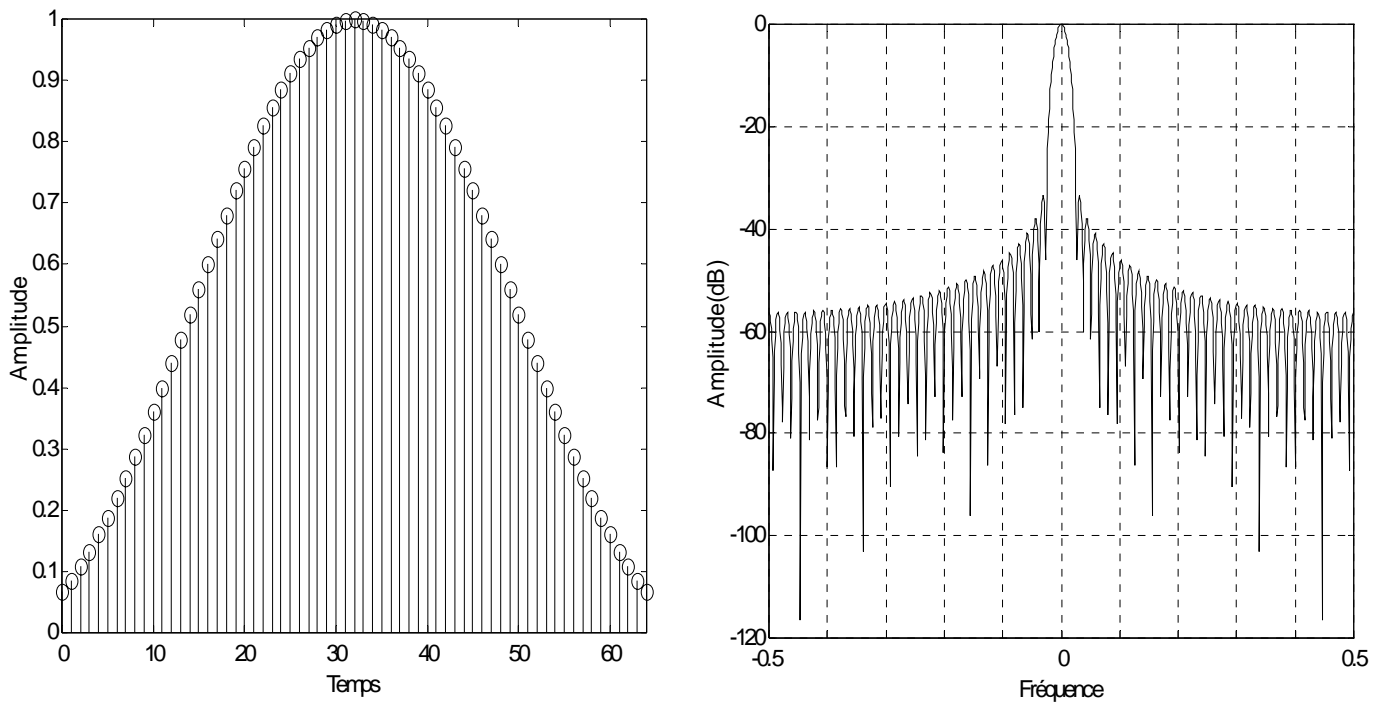
Pour de meilleurs performances, les valeurs du produit  $\beta N$  doivent être choisies dans l'intervalle  $[4, 9]$ . La largeur du lobe principal de  $W_k(f)$  augmente avec  $\beta$ . En prenant  $\beta$  de l'ordre de 4.5, l'atténuation est voisine de celle de Hanning mais le lobe central est moins large. Pour  $\beta$  de l'ordre de 9, le lobe est plus large mais l'atténuation plus importante.

### II.3.5 Récapitulatif des caractéristiques des fenêtres de pondérations

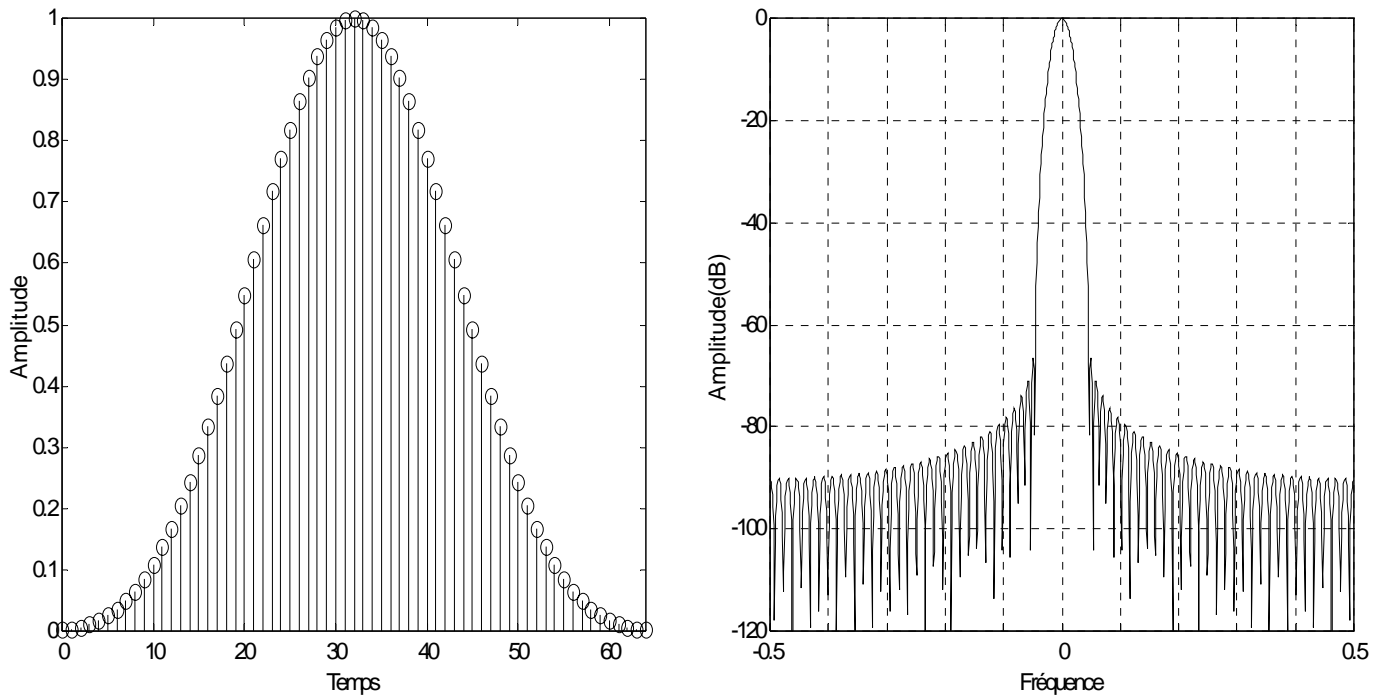
Fenêtre	$L_b$	$L_H$	A(dB)	$P_1$	$P_2$
<i>naturelle</i>	2/N	0.6	-13	1.43	2.46
<i>Bartlett</i>	4/N	0.89	-25	2.86	5.92
<i>Hanning</i>	4/N	1	-31	2.3	3.3
<i>Hamming</i>	4/N	0.91	-41	2.4	3.6
<i>Blackman</i>	6/N	1.2	-57	3.5	4.5

**Tableau 1** : fenêtres de pondération





Figure(II. 7) : Fenêtre de Kaiser ( $\beta=4.5$ )



Figure(II. 8) : Fenêtre de Kaiser ( $\beta=9$ )

## II. 4 Effet du fenêtrage dans l'analyse de Fourier

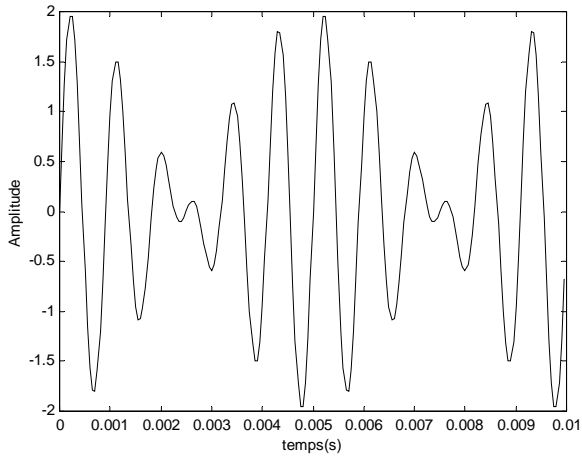
Les fenêtres d'analyse ou de pondération jouent un rôle très important dans l'observation spectrale. Une fenêtre est caractérisée par :

- la largeur de son lobe principal, elle fixe la résolution de l'analyse, c'est à dire l'aptitude à pouvoir séparer deux fréquences proches l'une de l'autre.
- les amplitudes des lobes secondaires, ils fixent la dynamique de l'analyse, c'est à dire l'aptitude à mesurer les amplitudes très différentes de deux composantes de fréquence relativement éloignées l'une de l'autre

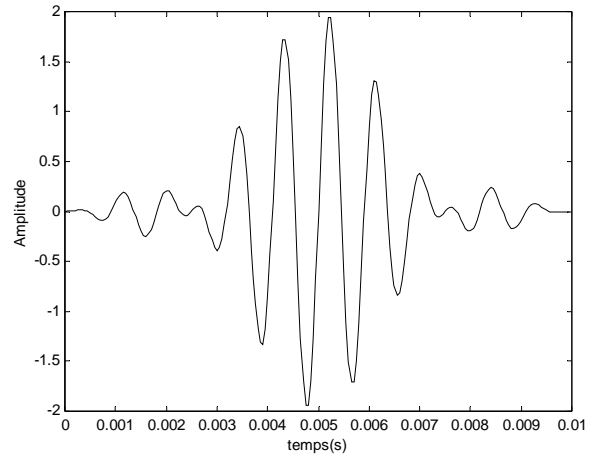
Pour un nombre d'échantillons  $N$  fixé la fenêtre rectangulaire est celle qui donne la meilleure résolution; la largeur du lobe principal est égale à  $2F_e/N$ . La fenêtre rectangulaire ne permet pas par contre d'obtenir une bonne dynamique car les lobes secondaires décroissent très lentement. En général on caractérise une fenêtre par l'atténuation  $A$  (en dB) du premier lobe secondaire. Dans le cas d'une fenêtre rectangulaire,  $A$  est égal à 13 dB; cette valeur est indépendante du nombre de points  $N$ . Pour obtenir une meilleure dynamique, on construit d'autres fenêtres; Triangulaire, Hanning, Hamming, Blackman ... . La fenêtre de Hanning, Hamming et Blackman sont des fenêtres dites trigonométriques.

On peut remarquer que toutes ces fenêtres ont un lobe principal plus large que  $2F_e/N$ , ( $4F_e/N$  pour Hanning, Hamming et  $6F_e/N$  pour Blackman) [10], donc une résolution moins bonne que la fenêtre rectangulaire. Elles ont par contre des lobes secondaires plus faibles que ceux de la fenêtre rectangulaire, elles offrent donc une meilleure dynamique. On peut se poser la question : pourquoi ces différentes fenêtres ? le choix d'une fenêtre se fait en fonction de l'écart en fréquence entre les deux composantes de fréquence dont on veut mesurer les amplitudes. Prenons le cas par exemple des fenêtres de Hanning et Hamming, si les deux fréquences à distinguer sont relativement proches l'une de l'autre, une fenêtre de Hamming s'impose car le premier lobe secondaire, ainsi que les suivants, sont à environ -45 dB du lobe principal, par contre si l'écart entre les deux fréquences est grand une fenêtre de Hanning est mieux appropriée car l'atténuation des lobes décroît quand la fréquence augmente et elle peut être inférieure à -45 dB.

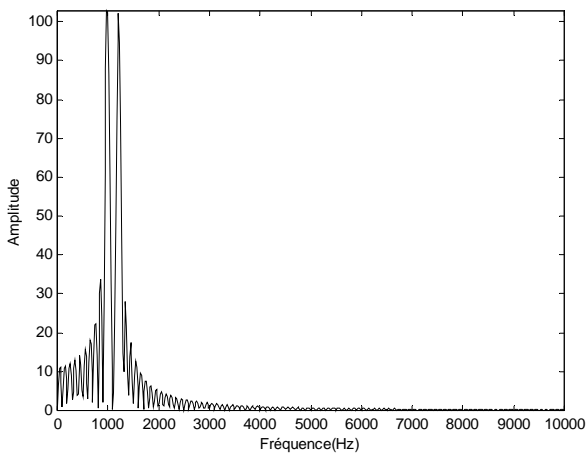
Les figures 9 à 12 illustrent un problème de résolution, en effet il s'agit de séparer deux fréquences très proches l'une de l'autre,  $\Delta F = 200$  Hz. Les amplitudes des deux composantes sont identiques. La figure 9 montre les échantillons  $x(k) = z(k)$  après passage au travers d'une fenêtre rectangulaire. La figure 10 montre les échantillons  $z(k)$  après passage au travers d'une fenêtre de Hanning. La figure 11 montre les composantes  $Z(n)$  de



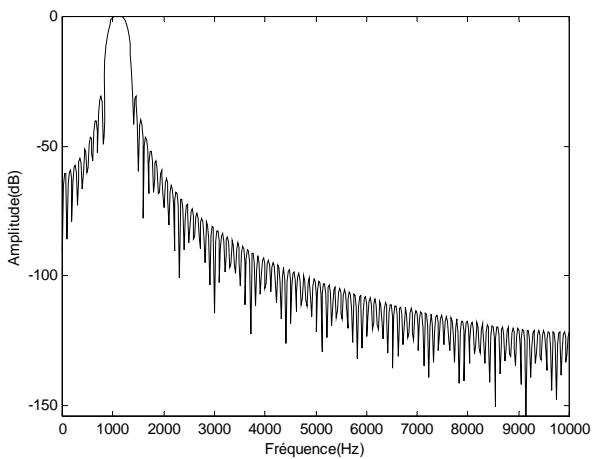
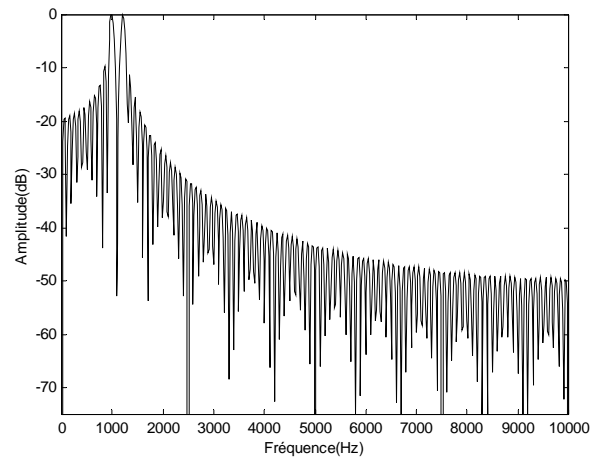
**Figure(II.9) :** Signal pondéré par la fenêtre rectangulaire



**Figure(II.10) :** Signal pondéré par la fenêtre de Hanning



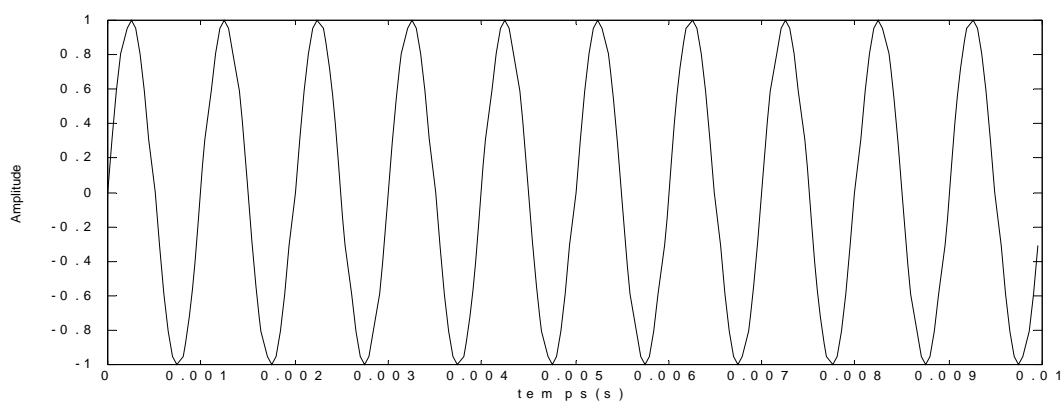
**Figure(II.11) :** Spectre du signal pondéré par la fenêtre rectangulaire



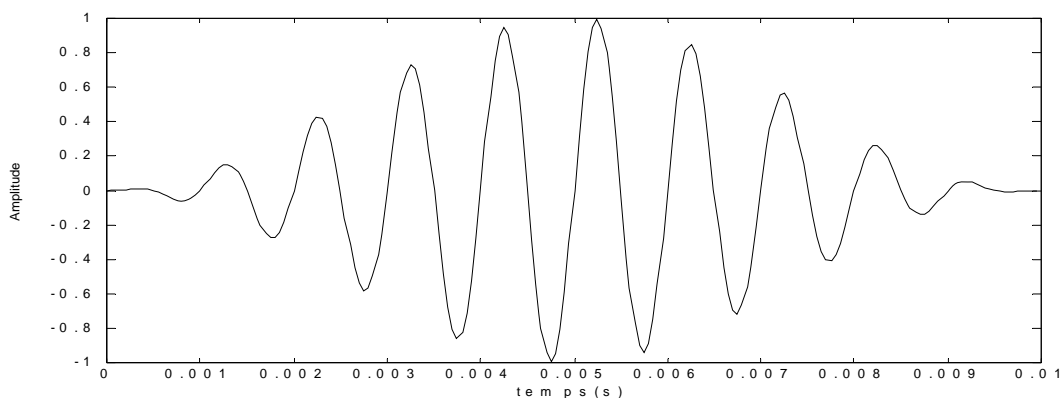
**Figure(II.12) :** Spectre du signal pondéré par la fenêtre de Hanning

la FFT obtenues avec la fenêtre rectangulaire. Sur la figure 11, on observe bien les deux composantes car on vérifie la relation  $\Delta F > 2F_c/N$ , ( $F_c = 20$  kHz et  $N = 200$ ). Sur la figure 12, on a tracé les composantes  $Z(n)$  de la FFT dans le cas d'une fenêtre de Hanning, cette fois il est impossible de séparer les deux composantes de fréquence car  $\Delta F < 4F_c/N$ .

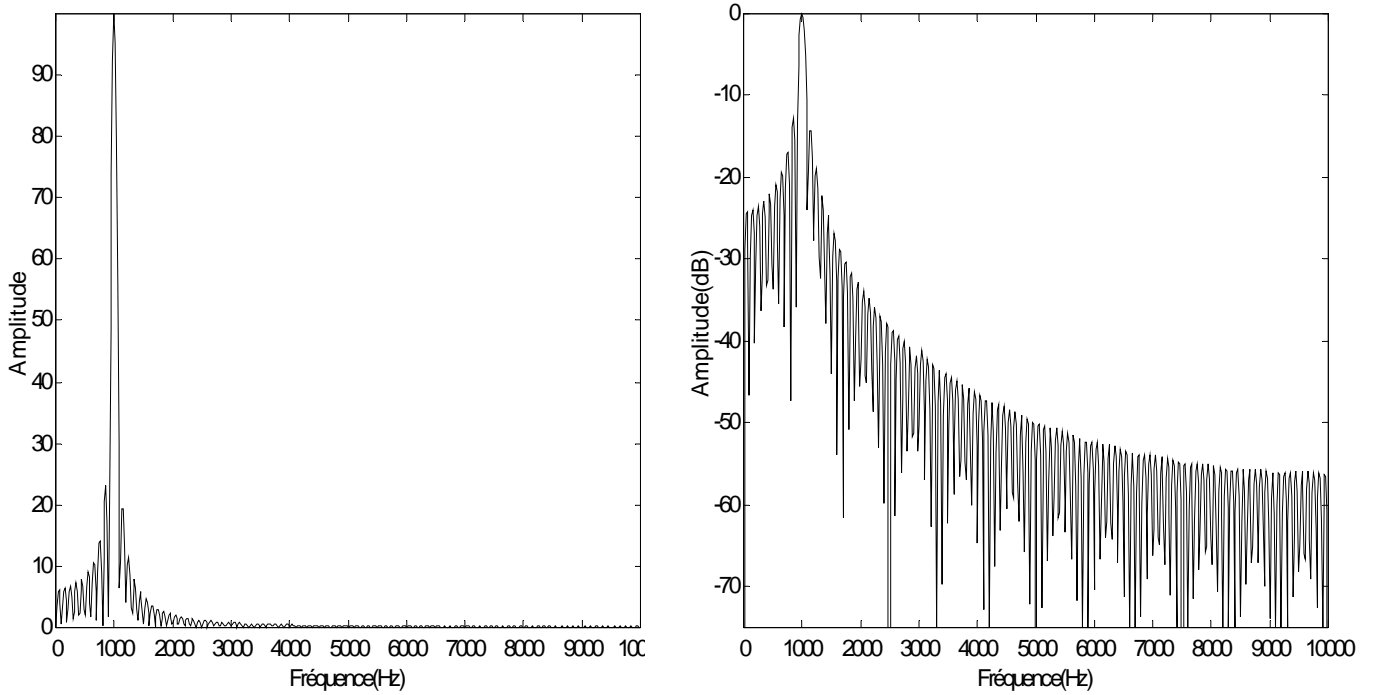
Les figures 13 à 16 illustrent un problème de dynamique, cette fois il s'agit de faire apparaître les deux composantes d'un signal constitué de deux fréquences relativement éloignées l'une de l'autre. Le rapport des amplitudes des deux composantes est très grand. La figure 13 montre les échantillons  $x(k) = z(k)$  après passage au travers d'une fenêtre rectangulaire. La figure 14 montre les échantillons  $z(k)$  après passage au travers d'une fenêtre de Hanning. Les composantes  $Z(n)$  de la FFT, après passage des échantillons au travers de la fenêtre rectangulaire, sont tracées sur la figure 15 ; les deux composantes de fréquence ne sont pas clairement observées. L'utilisation d'une fenêtre de Hanning permet de distinguer les deux composantes comme le montre la figure 16.



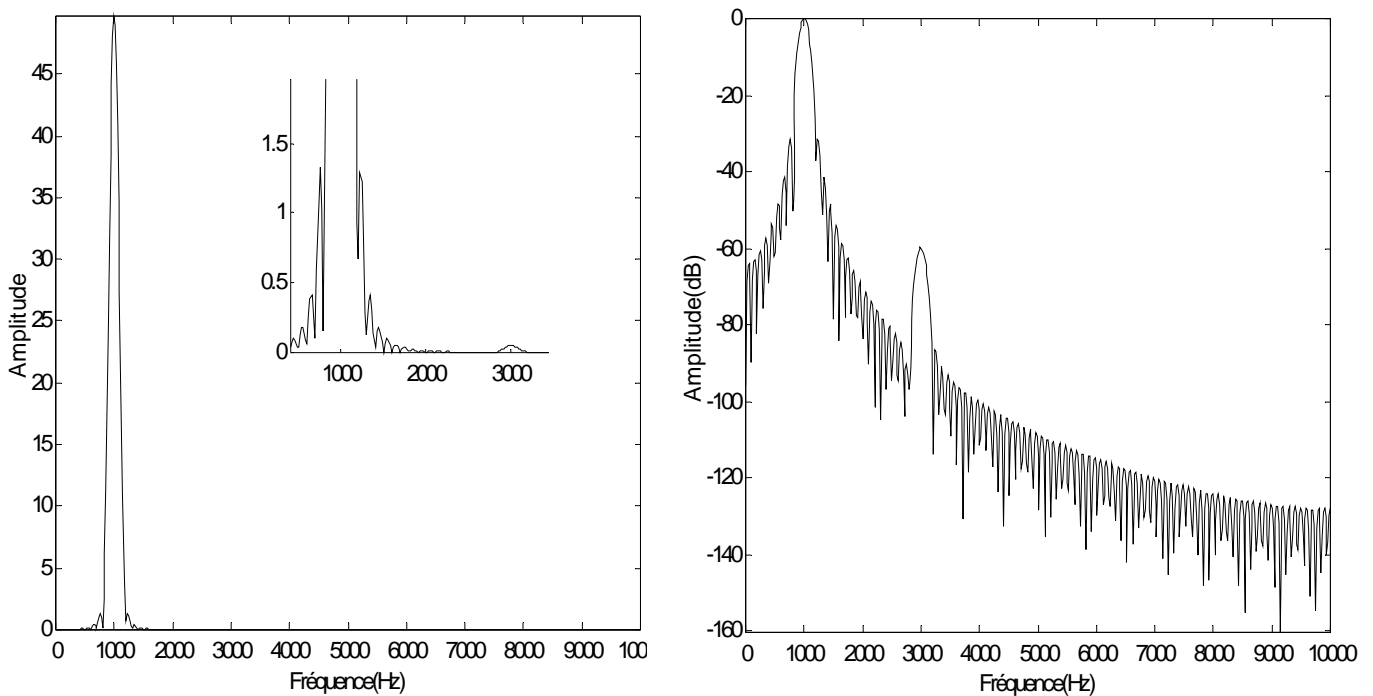
**Figure(II.13) :** Signal pondéré par la fenêtre rectangulaire



**Figure(II.14) :** Signal pondéré par la fenêtre de Hanning



Figure(II.15) : Spectre du signal pondéré par la fenêtre rectangulaire



Figure(II.16) : Spectre du signal pondéré par la fenêtre de Hanning

## II. 5 Conception des filtres RIF par la méthode des fenêtres

Une façon simple d'obtenir un filtre  $h(k)$  symétrique, passe-bas, réel et causal est de prendre le filtre idéal non-causal et infini  $h_i(k)$  :

$$h_i(k) = \begin{cases} \frac{w_c}{\pi} & k=0 \\ \frac{w_c}{\pi} \frac{\sin(w_c k)}{w_c k} = \frac{\sin(w_c k)}{\pi k} & k \neq 0 \end{cases} \quad H_i(w) = \begin{cases} 1 & |w| \leq w_c \\ 0 & w_c \leq |w| \leq \pi \end{cases} \quad (\text{II. 26})$$

et ensuite le tronquer de façon symétrique pour le rendre de durée finie et le décaler vers la droite pour le rendre causal. Cette méthode produit des réponses  $h(k)$  symétriques et avec un nombre impair  $M$  de coefficients. Notons que le décalage de la réponse tronquée (pour la rendre causale) ne fait qu'ajouter un terme linéaire à la phase de  $H(w)$ , et n'affecte pas du tout la réponse en amplitude  $|H(w)|$ . Par contre, tronquer la réponse idéale  $h_i(k)$  est équivalent à appliquer une fenêtre rectangulaire  $w(k)$  sur  $h_i(k)$  dans le domaine temporel. Dans le domaine des fréquences, on obtient la convolution de  $H_i(w)$  avec  $W(w)$  :

$$h_i(k) w(k) \xleftrightarrow{\text{T.F.}} \frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\pi}^{\pi} H_i(\theta) W(w-\theta) d\theta$$

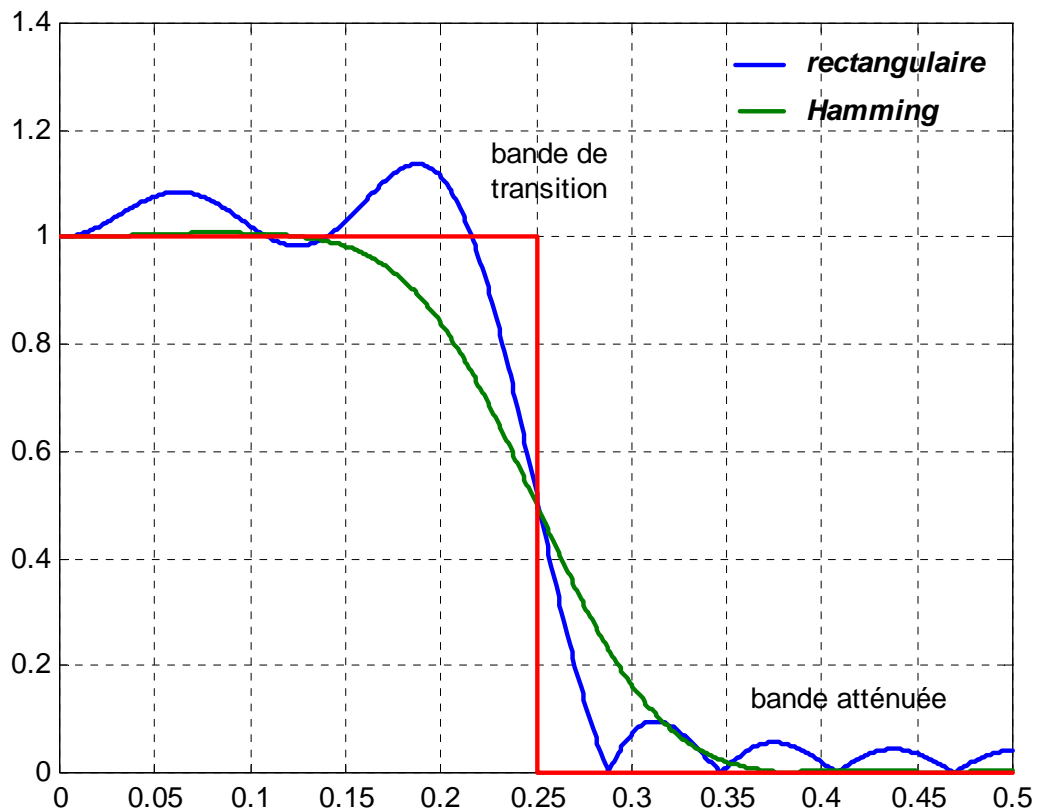
où la réponse  $|W(w)|$  de la fenêtre rectangulaire a la forme suivante:

$$|W(w)| = \left| \frac{\sin wM/2}{\sin w/2} \right| \quad (\text{II. 27})$$

La largeur du lobe principal de  $|W(w)|$  augmentera la largeur de la région de transition dans la réponse en fréquence  $|H(w)|$  du filtre passe-bas  $h(k)$  résultant, alors que l'amplitude des lobes secondaires introduira des ondulations et créera des lobes secondaires dans  $|H(w)|$ .

Notons qu'avec cette méthode le niveau des ondulations est maximal près de la fréquence de coupure, et ce niveau maximal est le même (en unités linéaires, pas en dB) dans la bande passante et dans la bande d'arrêt.

En utilisant une fenêtre  $w(k)$  ayant des lobes secondaires plus faibles, on peut réduire les ondulations et les lobes secondaires de  $|H(w)|$ . Par contre, le lobe principal de  $|W(w)|$  devient alors plus large, ce qui augmente la largeur de la région de transition[15]:



**Figure (II. 17) :** Filtre RIF conçu par une fenêtre rectangulaire et Hamming

Les fenêtres de Blackman, Hanning, Hamming et Kaiser (et d'autres...) peuvent être utilisées pour réduire les ondulations et les lobes secondaires de  $|H(\omega)|$ . La table 2 compare la largeur du lobe principal de même que l'amplitude des lobes secondaires pour différents types de fenêtres. Il est important que toutes les fenêtres soient symétriques, de façon à ne pas briser la propriété de symétrie des coefficients qui est requise pour la linéarité de phase [16].

Type de fenêtre	Amplitude maximal des lobes secondaires	Largeur approximatif du lobe principal	Bande affaiblie minimale
<b>Rectangulaire</b>	-13 dB	$4\pi/N$	-21 dB
<b>Bartlett</b>	-25 dB	$8\pi/N$	-25 dB
<b>Hanning</b>	-31 dB	$8\pi/N$	-44 dB
<b>Hamming</b>	-41 dB	$8\pi/N$	-53 dB
<b>Blackman</b>	-57 dB	$12\pi/N$	-74 dB

**Tableau (II. 2):** Caractéristiques des fenêtres de pondération



## La fenêtre fractionnaire

### III. 1 Introduction

Dans des études diélectriques, Cole et Cole [17] ont observés que les données de dispersion/relaxation mesurées à partir d'un grand nombre de matériaux, peuvent être modéliser par la fonction suivante.

$$H(p) = \frac{1}{[1 + (\tau_0 p)^\alpha]} \quad 0 < \alpha < 1 \quad (\text{III.1})$$

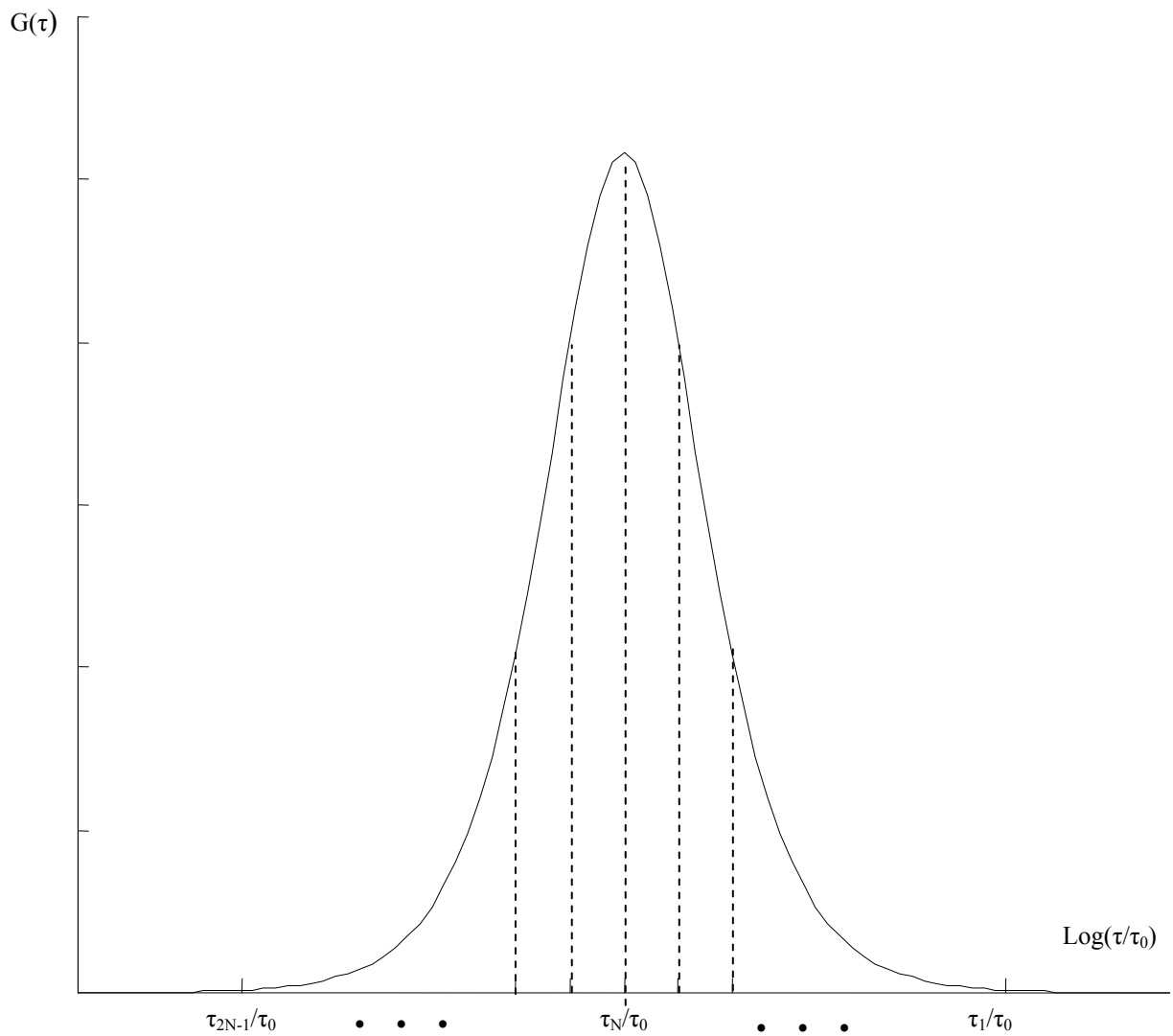
Ce type de fonction est considérée comme fonction de transfert des systèmes d'ordre fractionnaire. Cole et Cole ont aussi démontrés que cette fonction peut s'écrire comme :

$$H(p) = \frac{1}{[1 + (\tau_0 p)^\alpha]} = \int_0^\infty \frac{G(\tau)}{1 + \tau p} d\tau \quad 0 < \alpha < 1 \quad (\text{III.2})$$

où  $G(\tau)$  est une distribution des temps de relaxation définie par [18] :

$$G(\tau) = \frac{1}{2\pi} \left[ \frac{\sin(1-\alpha)\pi}{\left\{ \cosh \left[ \alpha \log \left( \frac{\tau}{\tau_0} \right) \right] \right\} - \cos(1-\alpha)\pi} \right] \quad (\text{III.3})$$

Donc, l'idée de la fenêtre fractionnaire est tirée de cette distribution  $G(\tau)$ .



**Figure (III. 1) :** Fonction de distribution de Cole-Cole.

### III. 2 Présentation de la fenêtre fractionnaire

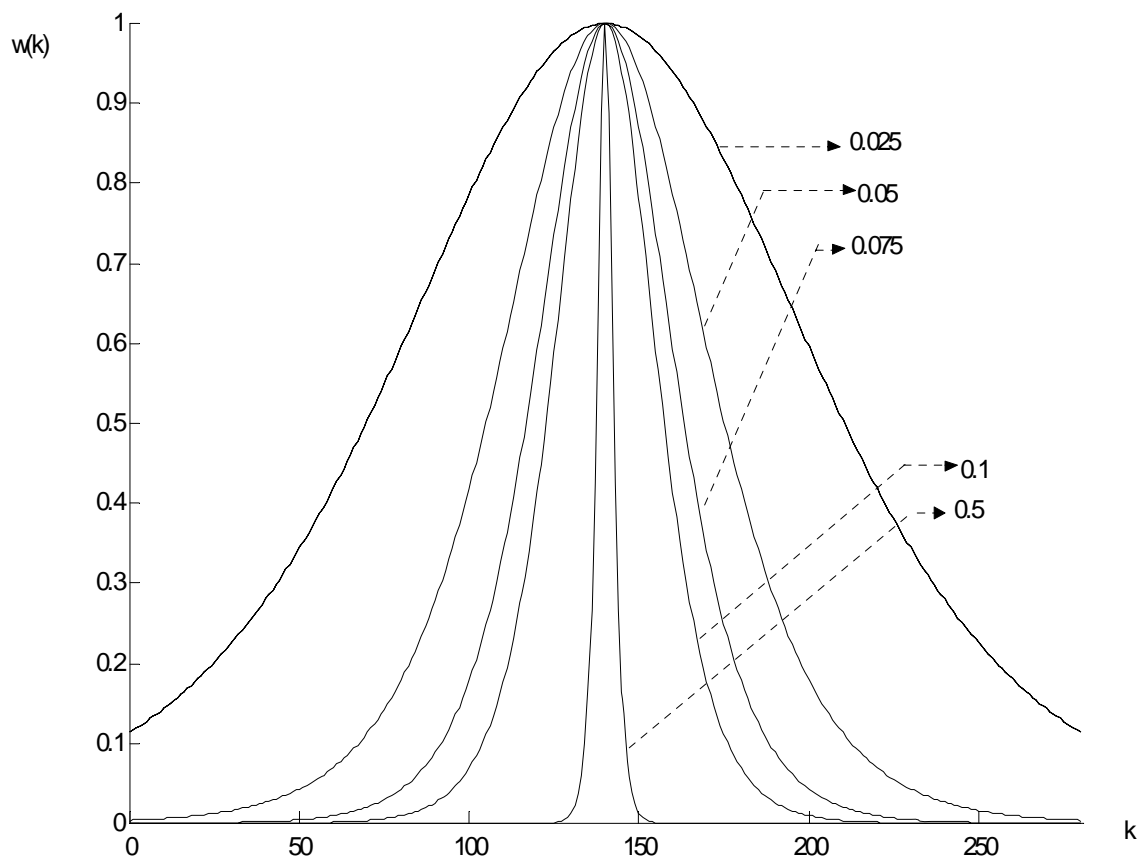
La fenêtre fractionnaire est définie par l'équation suivante :

$$w_f(k) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin[(1-\alpha)\pi]}{\left[ \cosh\left[\left(k - \frac{N-1}{2}\right)\alpha\right] - \cos[(1-\alpha)\pi] \right]} \quad (\text{III.4})$$

où  $\alpha$  est un nombre réel tel que  $0 < \alpha < 1$  et  $N$  le nombre d'échantillons (longueur de la fenêtre).

La fenêtre fractionnaire comme les autres fenêtres, est introduite pour satisfaire le compromis entre la largeur du lobe principal et l'amplitude maximale des lobes secondaires.

Le coefficient  $\alpha$  permet de varier la forme de la fenêtre fractionnaire dans le but de modifier ses caractéristiques spectrales. La figure (III. 2) présente la fenêtre fractionnaire pour différentes valeurs de  $\alpha$ .



**Figure (III. 2) :** Représentation de la fenêtre fractionnaire en fonction de  $\alpha$ .

Pour les fenêtres usuelles le nombre d'échantillons  $N$  permet d'élever la durée de la fenêtre, c'est à dire seule la longueur de la fenêtre change sans modifier sa distribution. On peut considérer l'effet d'augmentation des échantillons comme un changement d'échelle au niveau des abscisses, sans modifier l'amplitude des échantillons. Par contre pour la fenêtre fractionnaire plus que la durée de la fenêtre change, on trouve aussi que l'amplitude des deux échantillons extrêmes est variée, ce qui donne une nouvelle forme de la fenêtre.

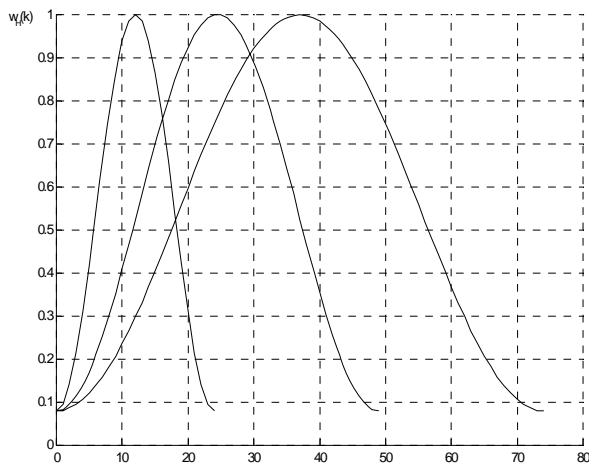
Pour illustrer l'effet d'augmentation de  $N$  sur la forme de la fenêtre, on représente la fenêtre de Hamming et celui de Blackman avec un nombre d'échantillons différent,  $N$  est respectivement (25, 50 et 75) figures (III. 3). Pour les deux fenêtres on peut observer que la distribution ne change pas, l'amplitude des deux échantillons extrêmes est la même pour chaque fenêtre (0.08 pour Hamming et nulle pour Blackman), on observe aussi que les amplitudes des échantillons représentant le même pourcentage du total du nombre d'échantillons sont très proches pour les trois cas, comme titre d'exemple prenant les échantillons représentant  $1/5^{\text{ème}}$  du total du nombre d'échantillons qui sont respectivement 5, 10 et 15 on trouve que les amplitudes correspondantes sont 0.42, 0.41 et 0.405 pour Hamming et 0.22, 0.2107 et 0.2007 pour Blackman.

Ce qui concerne la fenêtre fractionnaire, la figure (III. 4) montre l'influence de  $N$  sur sa géométrie, il est clair que seule la valeur des deux échantillons extrêmes qui varie en fonction de  $N$ , sans autant changer la valeur des échantillons situés au milieu. Pour l'exemple prenant en figure (III. 4) on trouve que l'amplitude des deux échantillons extrêmes est décroissante par rapport à  $N$ , pour les trois cas les amplitudes sont respectivement 0.38, 0.04 et 0.01.

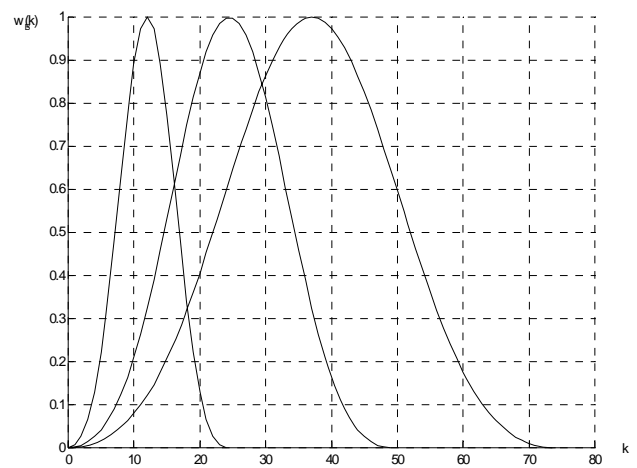
Tous ces effets sur la distribution de la fenêtre fractionnaire sont interprétés dans le paragraphe suivant comme des modifications au niveau du spectre de la fenêtre.

### III.3 Etude de la fenêtre fractionnaire

A partir de la représentation de la fenêtre fractionnaire, on voit que celle-ci est caractérisée par les deux paramètres  $\alpha$  et  $N$ , donc on peut tirer les caractéristiques de cette fenêtre en fonction de ces deux paramètres.



(a) : Fenêtre de Hamming



(b) : Fenêtre de Blackman

Figure (III. 3) : L'effet de la Longueur de la fenêtre sur sa forme

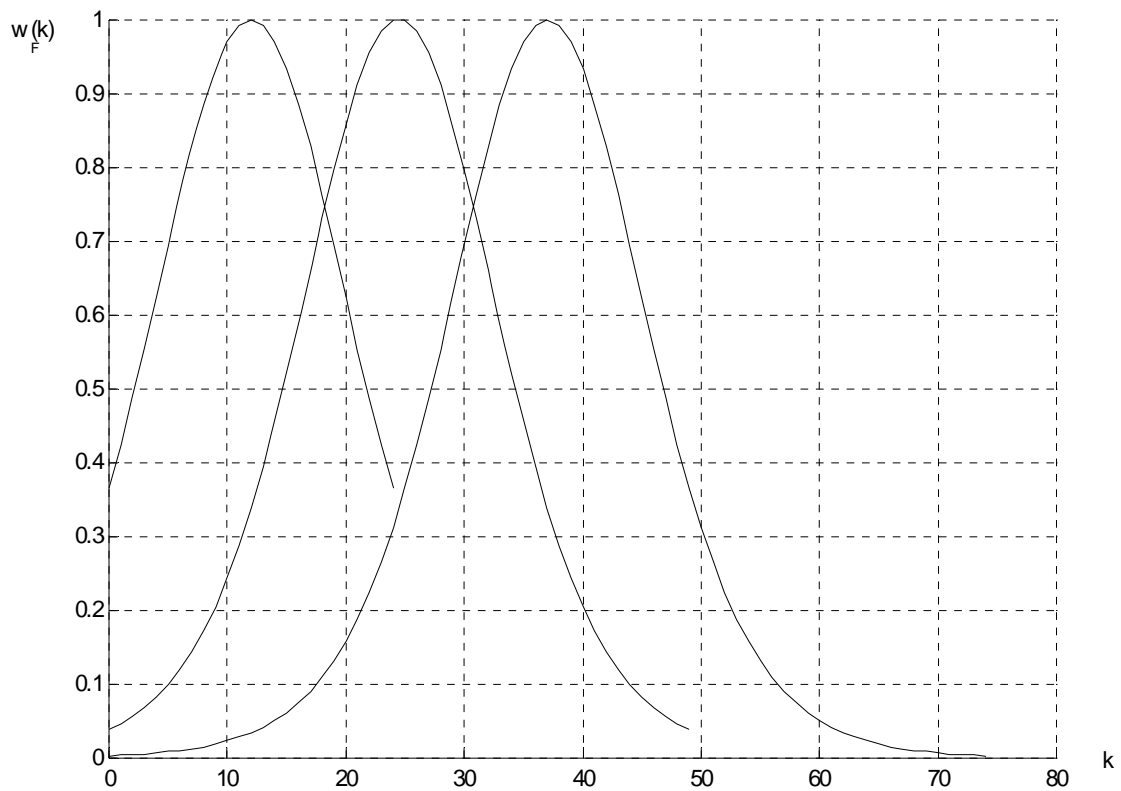


Figure (III. 4) : Représentation de la fenêtre fractionnaire en fonction de N.

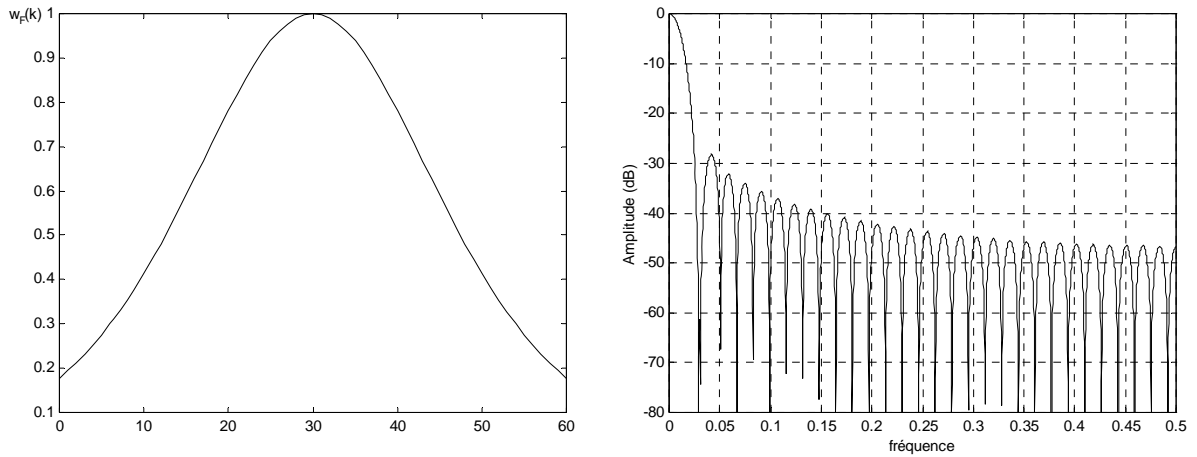
### I .3.1 Les caractéristiques de la fenêtre en fonction de $\alpha$

Rappelons qu'une fenêtre est caractérisée par la largeur de son lobe central et l'amplitude maximale de ses lobes secondaires. Le coefficient d'ordre fractionnaire  $\alpha$  permet de changer la forme de la fenêtre ce qui permet de modifier ces deux caractéristiques spectrales, on présente dans la figure (III.5) le spectre de la fenêtre fractionnaire pour différentes valeurs de  $\alpha$ .

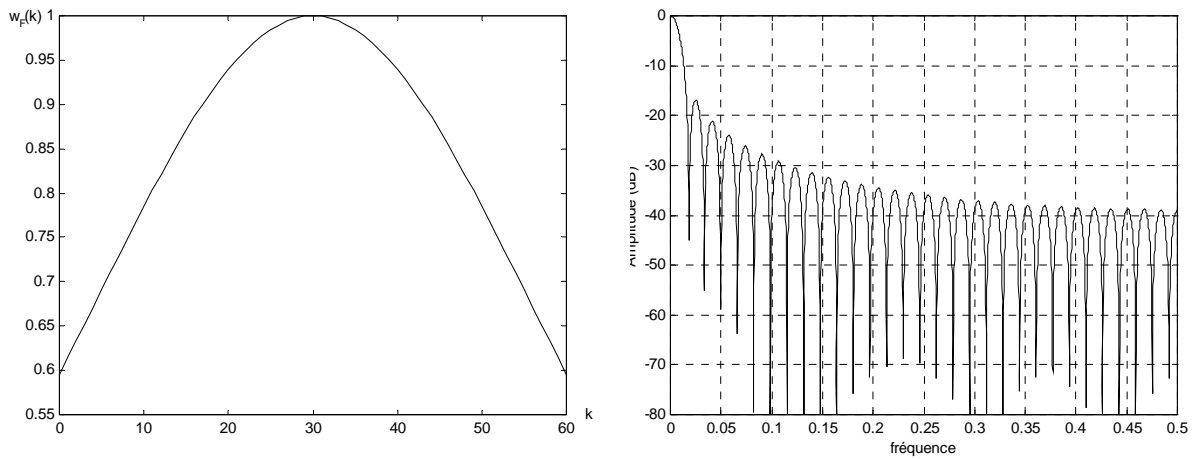
Le paramètre  $\alpha$  permet de modifier la forme de la fenêtre, ce qui change la largeur du lobe principal et l'amplitude maximale des lobes secondaires. Prenant comme référence la fenêtre rectangulaire où les amplitudes des échantillons sont égales à l'unité, cette fenêtre est caractérisée par un spectre qui a un lobe central le plus étroit ( $2/N$ ) et une amplitude maximale des lobes secondaires la plus grande (-13dB) par rapport aux autres fenêtres. Pour la fenêtre fractionnaire l'accroissement de  $\alpha$  permet de diminuer les amplitudes des échantillons extrêmes, cela introduit un élargissement du lobe principal et une atténuation des lobes secondaires, la figure (III. 5) illustre l'effet du paramètre  $\alpha$  sur la fenêtre fractionnaire et son spectre, dans (a) on remarque que l'amplitude des échantillons est de 0.18 jusqu'à l'unité pour  $\alpha=0.1$ , ce qui donne un spectre a un lobe central un peu large ( $3.5/N$ ) et une amplitude maximale des lobes secondaires de -28dB, par contre dans (c) où  $\alpha=0.01$  on trouve que les amplitudes des échantillons deviennent plus grandes et sont de 0.98 jusqu'à l'unité, ce qui donne un spectre presque similaire a celui de la fenêtre rectangulaire, le tableau (III.1) représente les résultats illustrés dans la figure (III. 5) en fonction de  $\alpha$  où A est l'amplitude maximale des lobes secondaires,  $L_H$  est la largeur à mi-hauteur du lobe central et  $L_b$  la largeur de base du lobe central.

N	$\alpha$	A	$L_H$	$L_b$
61	0.01	-13 dB	0.60	0.033
	0.05	-17 dB	0.67	0.037
	0.1	-28 dB	0.81	0.058

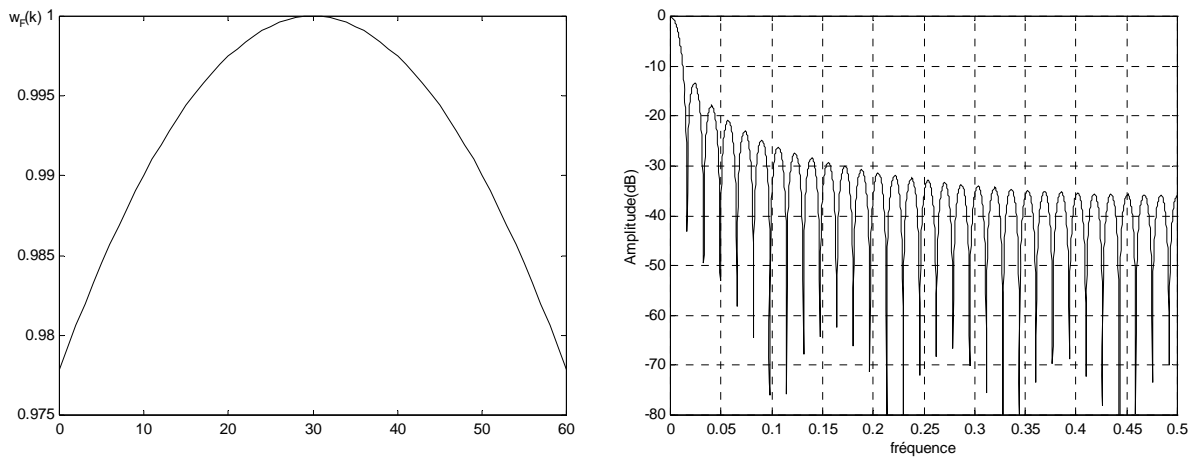
Tableau (III. 1): Fenêtre Fractionnaire



(a) : fenêtre fractionnaire avec  $\alpha=0.1$



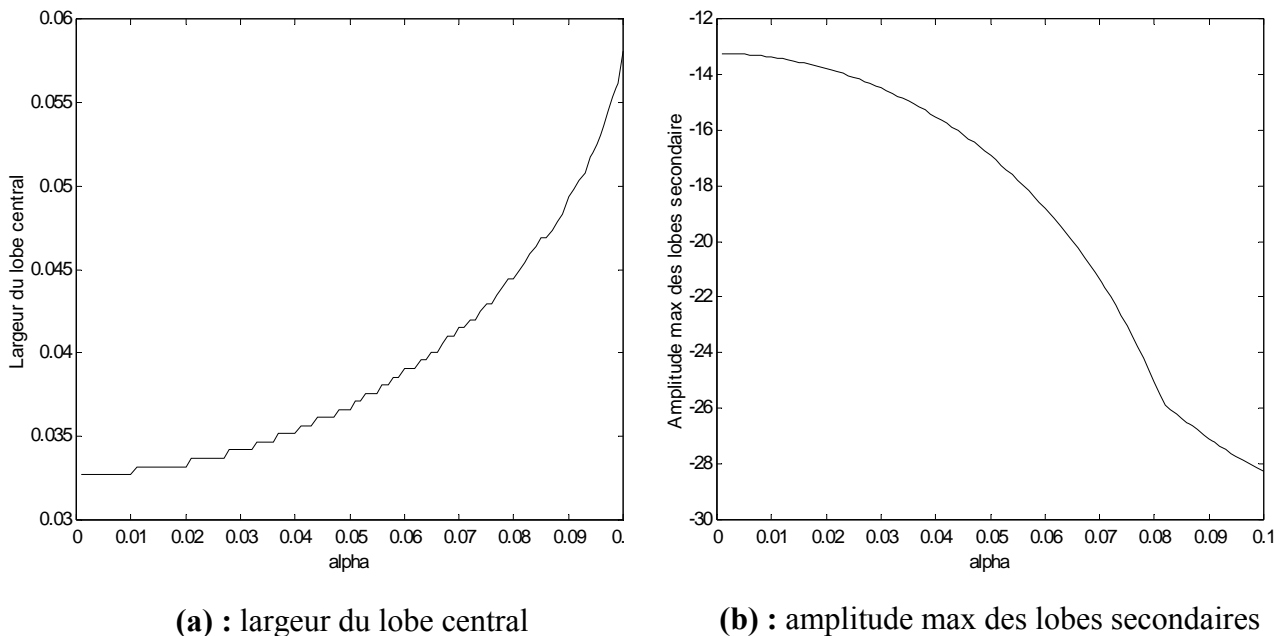
(b) : fenêtre fractionnaire avec  $\alpha=0.05$



(c) : fenêtre fractionnaire avec  $\alpha=0.01$

Figure (III. 5) : L'effet de  $\alpha$  sur les caractéristiques spectrales de  $w_F$ .

En conclut que la variation de la largeur du lobe principal est proportionnelle à  $\alpha$ , en revanche l'amplitude maximale des lobes secondaires est inversement proportionnelle à  $\alpha$ . Les deux courbes suivantes illustres cette conclusion figure (III.6).



**Figure (III. 6) :** Variation des caractéristiques spectrales en fonction de  $\alpha$ .

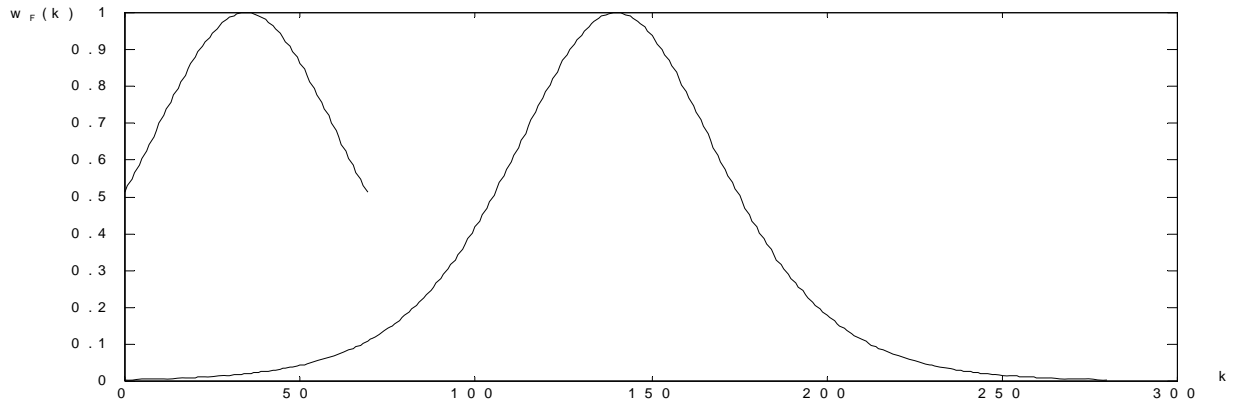
Notons que les deux courbes précédentes sont obtenues pour un nombre d'échantillons  $N=61$ , pour  $N$  différent les formes des deux courbes changent sans modification des caractéristiques.

### III. 3. 2. Les caractéristiques de la fenêtre en fonction de $N$

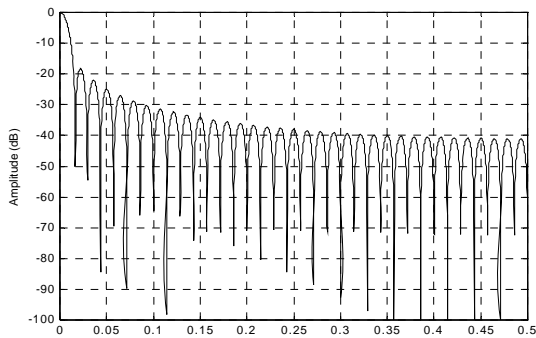
Comme on a vu dans le paragraphe précédent, le nombre d'échantillons a un effet sur la forme de la fenêtre. Une caractéristique de cette fenêtre est que la largeur de son lobe principal et l'amplitude de ses lobes secondaires dépendent aussi du nombre d'échantillons  $N$  par contre pour les fenêtres classiques seule la largeur du lobe principal dépend du nombre d'échantillons.

Les figures (III. 7) et (III. 8) montrent l'influence du nombre d'échantillons  $N$  sur la forme de la fenêtre et son spectre en la comparant avec celle de fenêtre de Hamming. Pour la fenêtre de Hamming l'effet de  $N$  agit sur la largeur du lobe central uniquement, l'augmentation de  $N$  fait diminuer la largeur du lobe mais l'amplitude maximale des lobes

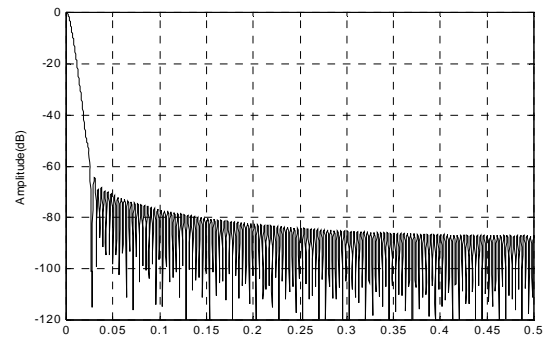




(a) :  $w(k)$  pour  $N=70$  et  $N=280$

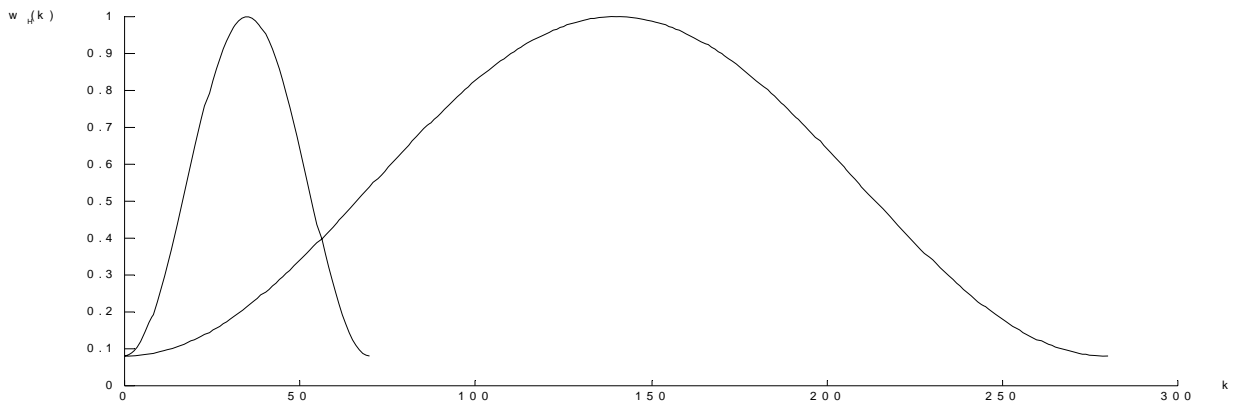


(b) : Spectre de  $w(k)$  pour  $N=70$

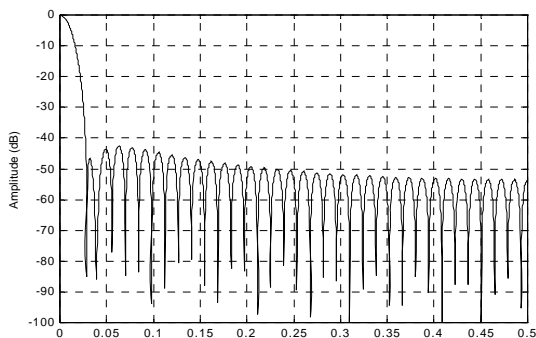


(c) : Spectre de  $w(k)$  pour  $N=280$

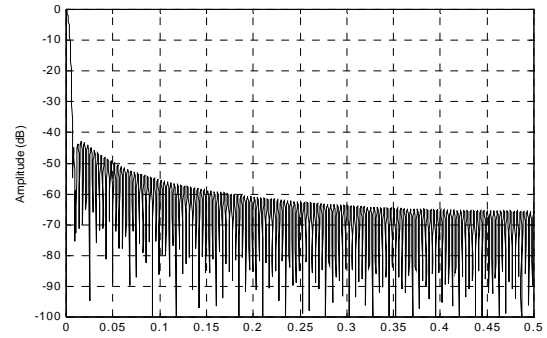
**Figure (III. 7) : Fenêtre fractionnaire**



(a) :  $w(k)$  pour  $N=70$  et  $N=280$



(b) : Spectre de  $w(k)$  pour  $N=70$



(c) : Spectre de  $w(k)$  pour  $N=280$

**Figure (III. 8) : Fenêtre de Hamming**

secondaires reste constante quel que soit N. Pour la fenêtre fractionnaire on remarque que l'augmentation de N fait atténuer l'amplitude maximale des lobes secondaires chose qui n'existe pas pour les autres fenêtres.

Les deux tableaux suivants illustrent ces résultats.

$\alpha$	N	A	$L_H$	$L_b$
0.05	70	-18 dB	0.67	0.033
0.05	280	-65 dB	1.55	0.054

Tableau (III. 2): Fenêtre Fractionnaire

N	A	$L_H$	$L_b$
70	-42 dB	0.91	0.057
280	-42 dB	0.91	0.014

Tableau (III. 3): Fenêtre de Hamming

On remarque aussi que l'augmentation de N élargit le lobe central au lieu de réduire sa largeur comme pour les autres fenêtres.

Les deux courbes suivantes représentant les variations des caractéristiques de la fenêtre fractionnaire en fonction de N pour  $\alpha=0.05$ .

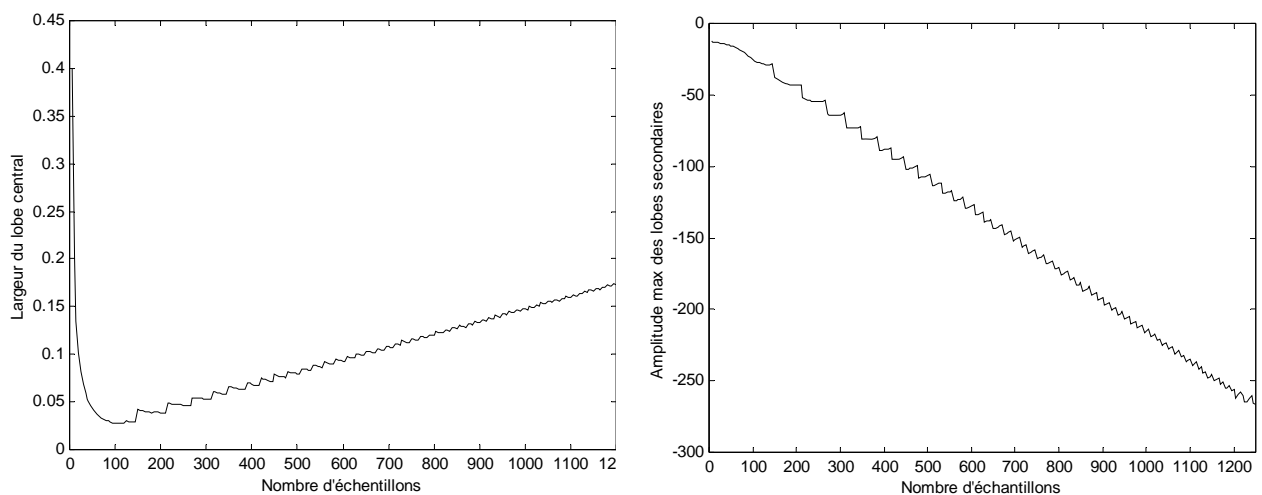


Figure (III.9) : Variation des caractéristiques spectrales en fonction de N.

Notons que les valeurs des courbes représentées dans les figures (III. 6) et (III. 9) peuvent être variées en modifiant la valeur de N pour la première figure et  $\alpha$  pour la deuxième, sans autant modifier les deux caractéristiques. Le tableau (III. 4) représente la variation des caractéristiques de la fenêtre fractionnaire en fonction de N et  $\alpha$ .

$\alpha$	N	25	60	70	100	150	300	500	700	1000	1500	2000	2500	3000	3500
<b>0.001</b>	<b>L<sub>b</sub></b>	2.00	2.00	2.01	2.02	1.97	2.05	1.95	2.05	1.95	2.19	1.95	3.66	5.86	11.96
	<b>L<sub>h</sub></b>	0.60	0.60	0.60	0.59	0.60	0.62	0.54	0.59	0.61	0.54	0.73	0.91	0.37	0.43
	<b>A</b>	13.21	13.25	13.25	13.26	13.26	13.34	13.39	13.64	13.65	14.1	14.75	20.14	25.06	32.67
<b>0.005</b>	<b>L<sub>b</sub></b>	2.00	1.99	2.01	2.00	2.05	2.05	2.19	2.39	2.92	6.59	7.81	12.20	21.97	23.93
	<b>L<sub>h</sub></b>	0.60	0.60	0.60	0.59	0.60	0.62	0.67	0.59	0.85	0.91	1.22	1.52	1.83	2.14
	<b>A</b>	13.22	13.28	13.30	13.35	13.46	14.09	15.66	18.22	22.25	35.23	38.66	55.14	74.04	81.57
<b>0.01</b>	<b>L<sub>b</sub></b>	2.00	2.02	2.01	2.00	2.05	2.19	2.68	4.10	7.81	16.11	27.34	42.72	55.66	75.20
	<b>L<sub>h</sub></b>	0.60	0.60	0.60	0.59	0.60	0.62	0.79	0.93	1.09	1.64	2.19	2.74	3.30	3.85
	<b>A</b>	13.23	13.38	13.43	13.62	14.09	16.81	22.24	28.96	43.61	64.38	85.81	108.69	123.99	146.39
<b>0.012</b>	<b>L<sub>b</sub></b>	2.00	2.02	2.01	2.05	2.05	2.34	3.41	6.49	11.71	23.43	39.06	59.81	79.10	107.67
	<b>L<sub>h</sub></b>	0.60	0.60	0.60	0.62	0.60	0.69	0.79	0.93	1.34	2.01	2.68	3.35	4.03	4.70
	<b>A</b>	13.24	13.44	13.51	13.78	14.46	18.56	28.13	37.87	54.85	81.55	105.80	135.32	151.22	181.80
<b>0.015</b>	<b>L<sub>b</sub></b>	2.00	2.02	2.01	2.05	2.12	2.63	6.34	8.20	15.62	35.15	55.66	87.89	123.05	167.48
	<b>L<sub>h</sub></b>	0.60	0.60	0.60	0.62	0.64	0.69	0.91	1.11	1.58	2.38	3.17	3.96	4.76	5.55
	<b>A</b>	13.26	13.54	13.65	14.09	15.17	22.45	37.64	42.88	64.22	102.96	126.43	165.96	195.32	232.98
<b>0.017</b>	<b>L<sub>b</sub></b>	2.00	2.02	2.05	2.05	2.19	2.78	6.59	11.62	19.53	43.21	71.28	107.42	155.27	203.37
	<b>L<sub>h</sub></b>	0.60	0.60	0.60	0.62	0.64	0.76	1.03	1.28	1.83	2.74	3.66	4.57	5.49	6.41
	<b>A</b>	13.28	13.63	13.77	14.33	15.75	26.12	41.31	54.65	72.29	114.48	145.55	180.35	221.89	250.70
<b>0.02</b>	<b>L<sub>b</sub></b>	2.00	2.05	2.05	2.09	2.27	3.36	7.81	15.03	27.34	55.66	95.70	147.70	210.94	271.73
	<b>L<sub>h</sub></b>	0.60	0.60	0.60	0.62	0.64	0.76	1.15	1.62	2.31	3.47	4.63	5.79	6.96	8.12
	<b>A</b>	13.30	13.78	13.97	14.75	16.78	28.13	43.41	64.43	88.79	127.47	170.57	216.41	250.94	250.75
<b>0.04</b>	<b>L<sub>b</sub></b>	2.02	2.13	2.22	2.44	3.36	11.42	27.58	51.26	95.70	208.00	301.75	384.52	458.50	548.58
	<b>L<sub>h</sub></b>	0.60	0.63	0.64	0.69	0.78	1.35	2.25	3.16	4.51	6.77	9.03	11.29	13.55	15.81
	<b>A</b>	13.58	15.44	16.29	20.08	28.11	54.67	88.58	124.61	170.86	256.75	256.77	258.64	250.69	250.68
<b>0.05</b>	<b>L<sub>b</sub></b>	2.03	2.22	2.32	2.78	6.37	15.82	39.79	75.53	147.46	275.39	433.59	544.43	533.20	781.01
	<b>L<sub>h</sub></b>	0.61	0.65	0.67	0.74	0.89	1.64	2.74	3.84	5.49	8.23	10.98	13.73	16.48	19.23
	<b>A</b>	13.78	16.79	18.24	25.81	37.53	64.15	106.24	151.40	215.23	256.82	256.76	257.87	250.67	250.66
<b>0.09</b>	<b>L<sub>b</sub></b>	2.13	2.95	3.72	7.03	14.79	47.46	123.53	235.49	357.42	509.76	678.71	847.16	1016.60	1184.33
	<b>L<sub>h</sub></b>	0.63	0.76	0.82	1.03	1.48	2.96	4.94	6.92	9.88	14.83	19.77	24.71	29.66	34.61
	<b>A</b>	15.15	26.86	28.51	42.33	63.37	117.26	193.81	263.65	262.79	256.69	256.71	256.85	250.65	250.65
<b>0.1</b>	<b>L<sub>b</sub></b>	2.16	3.39	4.06	7.81	15.82	59.32	151.61	267.62	436.03	626.95	745.11	930.17	1321.29	1546.63
	<b>L<sub>h</sub></b>	0.63	0.79	0.88	1.13	1.66	3.33	5.55	7.77	11.10	16.66	22.21	27.77	33.33	38.88
	<b>A</b>	15.64	28.089	28.65	43.03	63.42	132.57	214.42	263.59	262.79	256.68	256.70	256.79	250.65	250.65

Tableau (III. 4): Caractéristiques de  $w_F$  en fonction de N et  $\alpha$ .

### III. 4 Evaluation de la fenêtre

#### III. 4. 1 Comparaison de la fenêtre fractionnaire

Pour évaluer la fenêtre fractionnaire il faut la comparer avec les autres fenêtres, mais on remarque que les caractéristique de la fenêtre variant en fonction  $\alpha$  et  $N$ , donc on peut pas faire une vraie comparaison avec les autres fenêtres. Pour cela on a définie un autre paramètre  $\beta = \alpha \cdot N$  qui fixent les caractéristiques de  $W_F(f)$ , chaque valeur de  $\beta$  donne une mesure précise soit pour la largeur du lobe principal ou bien l'amplitude des lobes secondaires.

En pilotant la fenêtre fractionnaire par le paramètre  $\beta$ , on peut simuler ou approcher aux caractéristiques intermédiaires des fenêtres classiques, dont le but d'utiliser une seule fenêtre souple qui répond aux applications voulues. Le tableau (III. 5) présente des comparaisons entre la fenêtre fractionnaire et d'autres fenêtres, avec les paramètres de  $w_F$  correspondants.

$\beta$	$L_b$	$L_H$	A	$P_1$	$P_2$	Fenêtre équivalente
1	$2/N$	0.6	-13	1.43	2.46	Rectangulaire
5.4	$2.95/N$	0.76	-26.85	2.53	3.56	Bartlett
6.9	$3.9/N$	0.87	-28.9	2.46	3.56	Hanning
8.4	$6.6/N$	0.94	-41	3.62	4.55	Hamming
11.5	$10.8/N$	1.27	-54	6.46	7.58	Blackman

**Tableau (III. 5):** Comparaison des fenêtres usuelles avec la fenêtre fractionnaire.

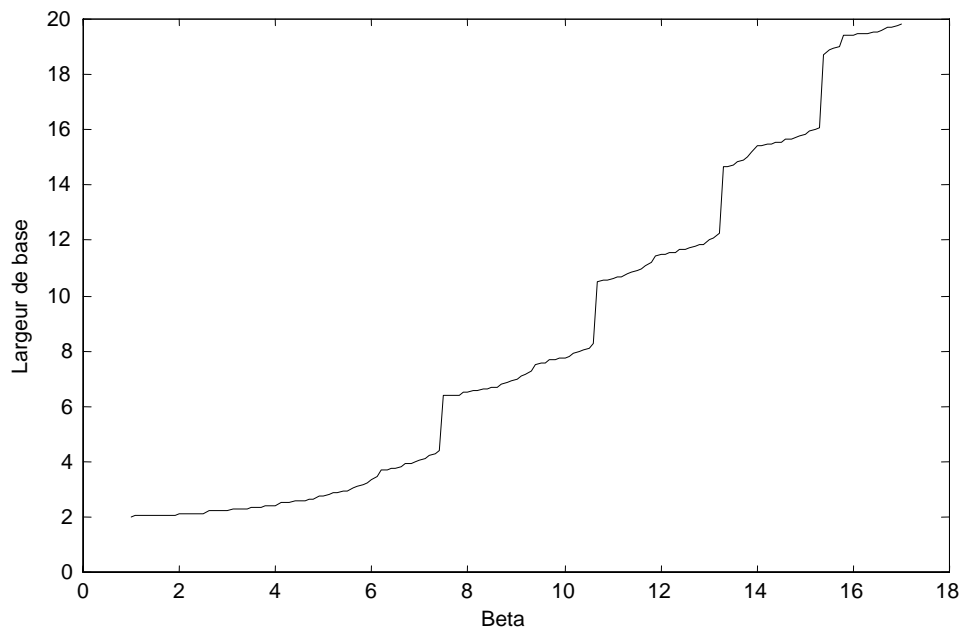
Plus que la fenêtre fractionnaire peut être remplacer d'autres fenêtres, il est possible aussi d'introduire des caractéristiques désirés en cas d'une application spécifique, il suffit donc de varier le paramètre  $\beta$  au sens d'améliorer le paramètre voulu (largeur du lobe ou bien l'amplitude des ondulations).

Le tableau suivant représente la variation des caractéristiques de la fenêtre en fonction de  $\beta$ .

$\beta$	$L_b$	$L_H$	A	$\beta$	$L_b$	$L_H$	A	$\beta$	$L_b$	$L_H$	A
1	1.99	0.61	13.62	6.4	3.76	0.83	28.68	11.8	11.21	1.31	54.31
1.2	2.06	0.61	13.79	6.6	3.83	0.83	28.83	12	11.50	1.35	54.50
1.4	2.06	0.61	13.98	6.8	3.91	0.87	28.89	12.2	11.58	1.35	54.59
1.6	2.06	0.61	14.22	7	4.06	0.87	28.82	12.4	11.65	1.38	54.56
1.8	2.06	0.61	14.47	7.2	4.20	0.87	28.62	12.6	11.72	1.38	54.41
2	2.14	0.61	14.76	7.4	4.42	0.90	28.20	12.8	11.87	1.42	54.14
2.2	2.14	0.65	15.08	7.6	6.41	0.90	38.03	13	12.02	1.46	53.72
2.4	2.14	0.65	15.45	7.8	6.41	0.94	39.11	13.2	12.24	1.46	53.12
2.6	2.21	0.65	15.86	8	6.49	0.94	39.87	13.4	14.67	1.49	63.18
2.8	2.21	0.65	16.30	8.2	6.56	0.98	40.45	13.6	14.82	1.49	63.56
3	2.21	0.65	16.78	8.4	6.64	0.98	40.99	13.8	15.04	1.53	63.85
3.2	2.29	0.65	17.33	8.6	6.71	1.01	41.51	14	15.41	1.57	64.05
3.4	2.29	0.68	17.92	8.8	6.86	1.01	41.98	14.2	15.48	1.57	64.16
3.6	2.36	0.68	18.56	9	7.00	1.05	42.39	14.4	15.56	1.60	64.16
3.8	2.43	0.68	19.29	9.2	7.15	1.05	42.73	14.6	15.63	1.60	64.04
4	2.43	0.68	20.07	9.4	7.52	1.09	43.01	14.8	15.70	1.64	63.80
4.2	2.51	0.72	20.95	9.6	7.59	1.09	43.20	15	15.85	1.68	63.43
4.4	2.58	0.72	21.93	9.8	7.67	1.12	43.28	15.2	16.00	1.68	62.92
4.6	2.58	0.72	23.04	10	7.74	1.12	43.26	15.4	18.73	1.71	71.98
4.8	2.65	0.72	24.29	10.2	7.89	1.16	43.10	15.6	18.95	1.71	72.29
5	2.73	0.76	25.76	10.4	8.04	1.16	42.81	15.8	19.39	1.75	72.49
5.2	2.88	0.76	26.36	10.6	8.26	1.20	42.34	16	19.39	1.79	72.59
5.4	2.95	0.76	26.85	10.8	10.54	1.20	52.24	16.2	19.46	1.79	72.59
5.6	3.02	0.79	27.31	11	10.62	1.23	52.77	16.4	19.54	1.82	72.47
5.8	3.17	0.79	27.74	11.2	10.69	1.23	53.26	16.6	19.61	1.86	72.24
6	3.32	0.79	28.11	11.4	10.84	1.27	53.69	16.8	19.69	1.86	71.87
6.2	3.69	0.83	28.43	11.6	10.99	1.31	54.04	17	19.83	1.90	71.38

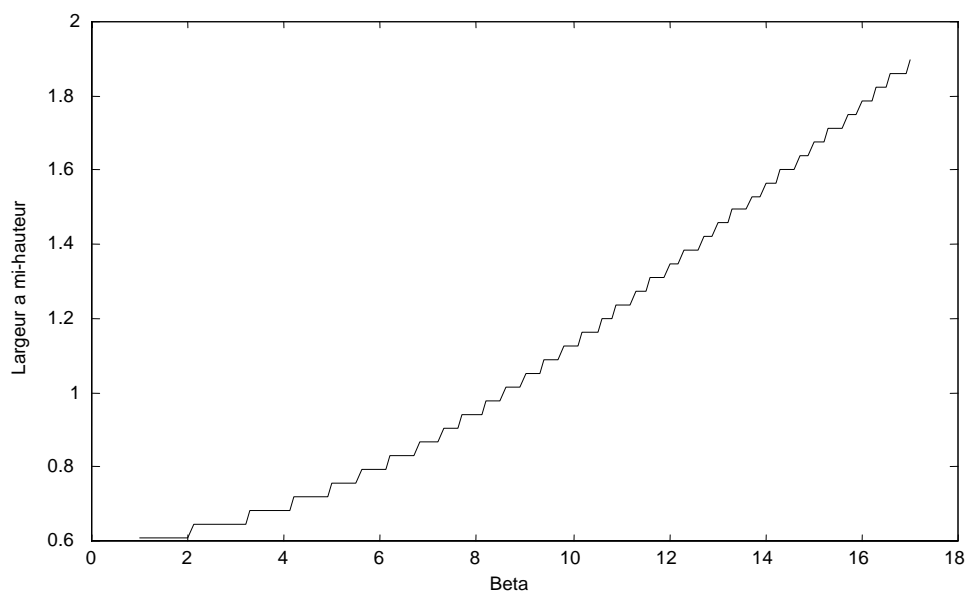
Tableau (III. 6): Caractéristiques de  $w_F$  en fonction de  $\beta$ .

La courbe suivante représente la variation de la largeur de base du lobe principal en fonction de  $\beta$ . Notons que dans cette courbe le coefficient  $C$  décrit dans (II.8) qui a été représenté même pour le tableau précédent, pour mieux comparer la fenêtre ; ce n'est pas le cas pour la courbe (III.9.a).



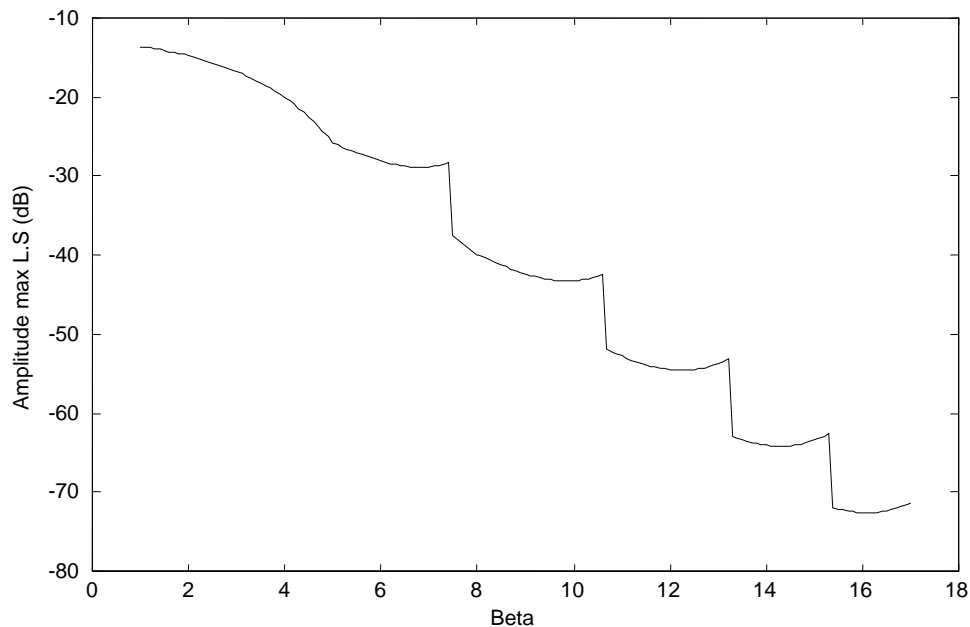
**Figure (III.10) :** Variation de largeur de base en fonction de  $\beta$ .

La figure suivante représente la variation de la largeur à mi-hauteur du lobe principal en fonction de  $\beta$  qui a un ordre croissant. On remarque que la courbe est limitée en inférieur par la valeur 0.6 qui est la largeur à mi-hauteur de la fenêtre rectangulaire et c'est le même cas dans la figure III.10 pour la largeur de base.



**Figure (III.11) :** Variation de largeur a mi-hauteur en fonction de  $\beta$

La courbe ci-dessous représente la variation de l'amplitude maximale des lobes secondaires en fonction de  $\beta$ . Les changements brusques sont dus à la sensibilité au produit  $\alpha.N$  au delà de 6. Aussi en confirme bien la valeur limite qui est ici  $-13$  dB.



**Figure (III.12) :** Variation de l'amplitude maximale L.S en fonction de  $\beta$

### III. 5 L'utilisation de la fenêtre fractionnaire

#### III. 5. 1 L'analyse spectrale

Grâce à sa nature, la fenêtrés fractionnaire peut jouer un rôle très important dans l'analyse de Fourier.

- La possibilité de réduire la largeur de son lobe principal, permet de fixer la résolution de l'analyse, c'est à dire l'aptitude de pouvoir séparer deux fréquences proches l'une de l'autre. La figure (III. 13) présente la résolution de deux sinusoïdes de même amplitude et de deux fréquences proches (4.5kHz et 5kHz) en variant la valeur de  $\alpha$ , pour  $F_c=64$ kHz et  $N=256$ .
- La possibilité d'atténuer les amplitudes des lobes secondaires, permet de fixer la dynamique de l'analyse, c'est à dire l'aptitude à mesurer les amplitudes très différentes de deux composantes de fréquence. La figure (III. 14) présente la mesure de deux sinusoïdes ont un rapport d'amplitude de 0.003 et de deux fréquences éloignées (5kHz et 10kHz) en variant la valeur de  $\alpha$ .

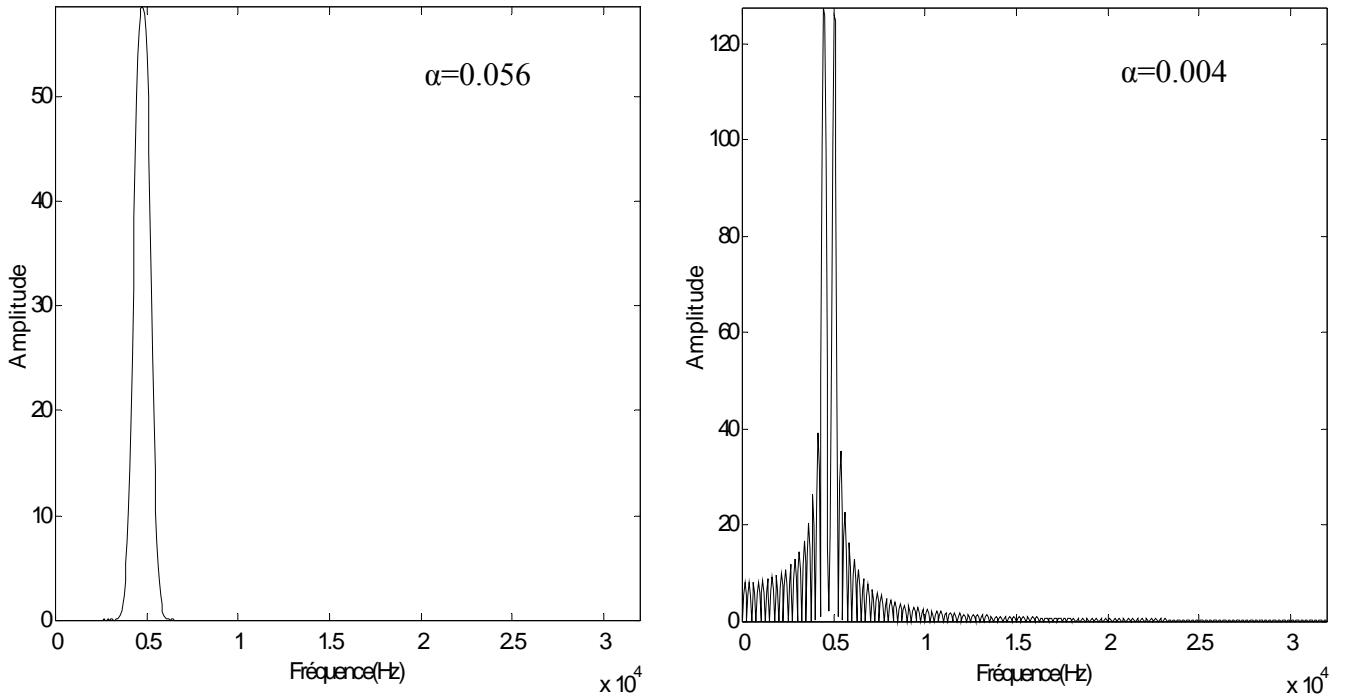


Figure (III. 13) : Résolution de deux fréquences proches

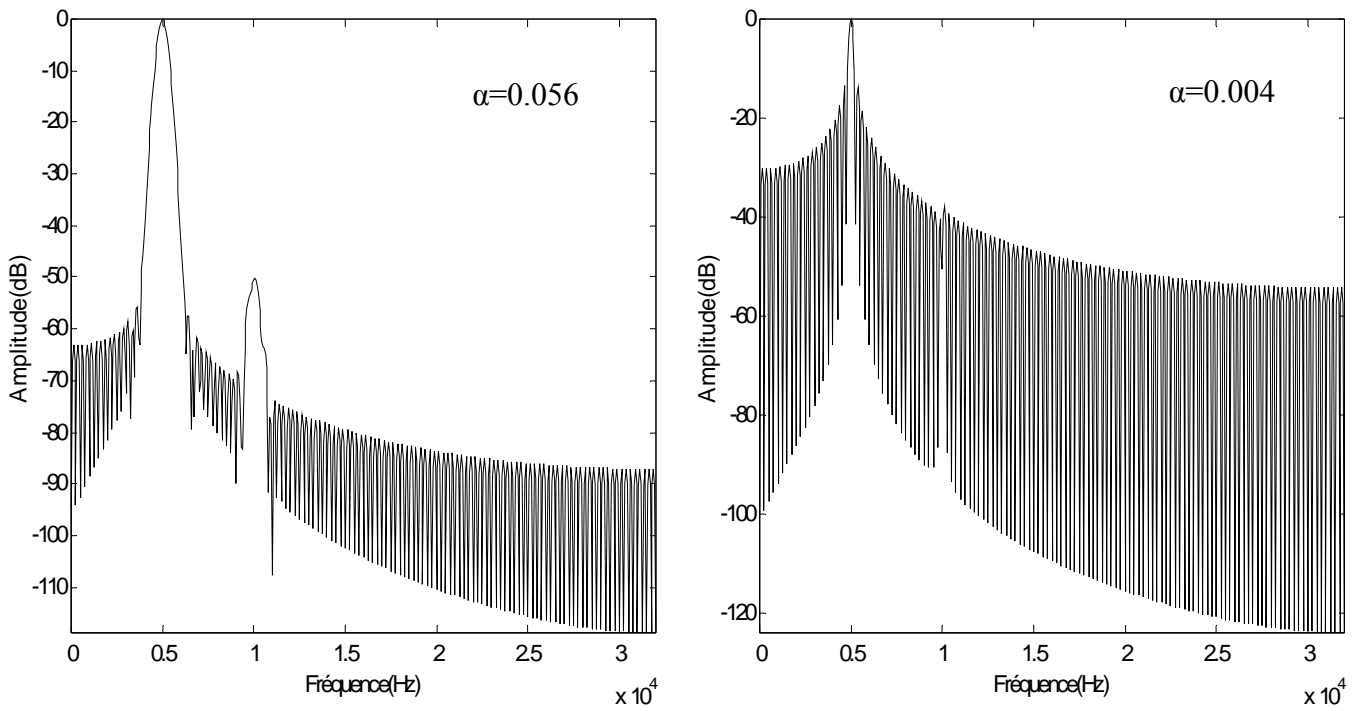
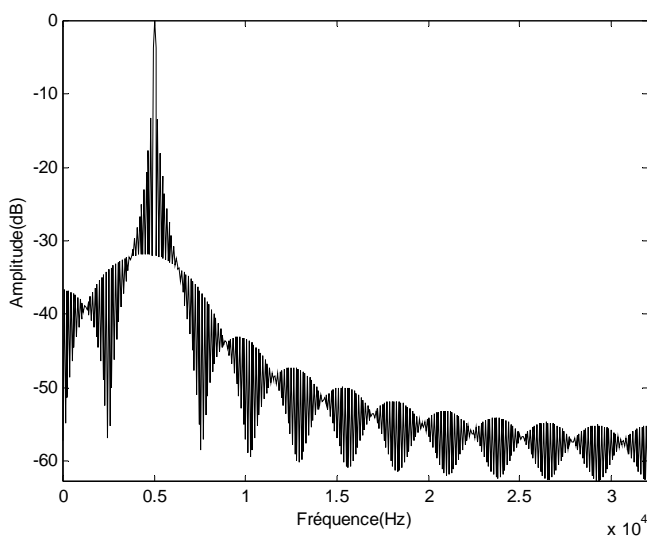


Figure (III. 14) : Mesure de deux amplitudes différentes

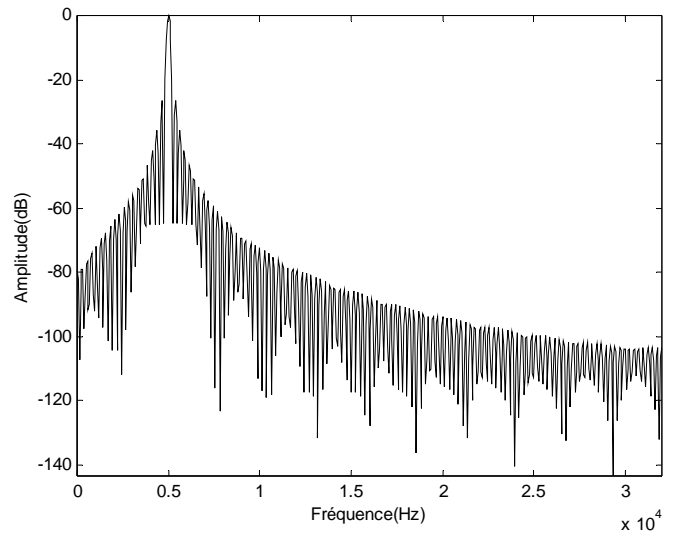


Pour séparer des fréquences plus proches, la fenêtre rectangulaire et la fenêtre fractionnaire ( $\beta < 2$ ) celles qui donnent la meilleure résolution. Par contre pour des composantes ont un rapport d'amplitude très grand, seule la fenêtre fractionnaire qui permet d'obtenir une bonne dynamique.

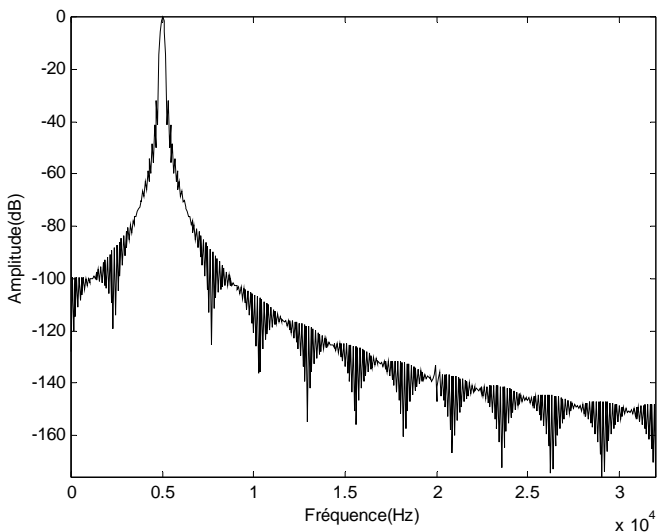
La figure suivante illustre un problème de dynamique de deux composantes d'un signal constitué de deux fréquences relativement éloignées l'une de l'autre  $f_1=5\text{kHz}$ ,  $f_2=20\text{kHz}$ ,  $f_e=64\text{kHz}$ ,  $N=501$  et un rapport d'amplitude de  $10^{-7}$ . Sur la figure (III.15-f) on remarque que la fenêtre fractionnaire donne une meilleur dynamique, les deux composantes dans (f) sont très claires que dans les autres cas.



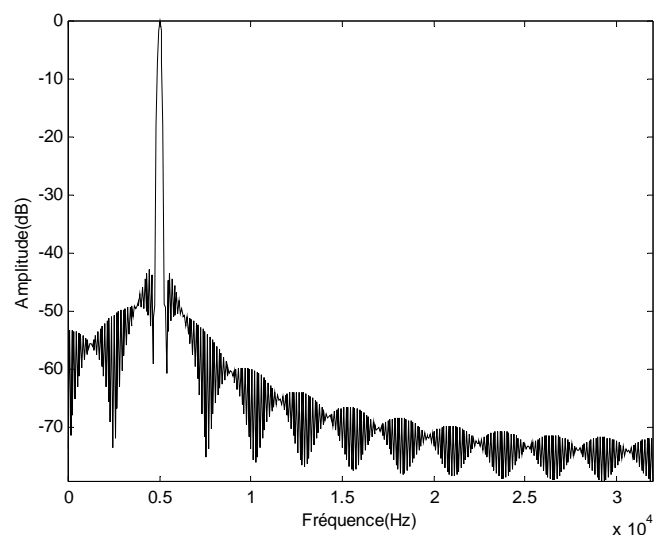
(a)



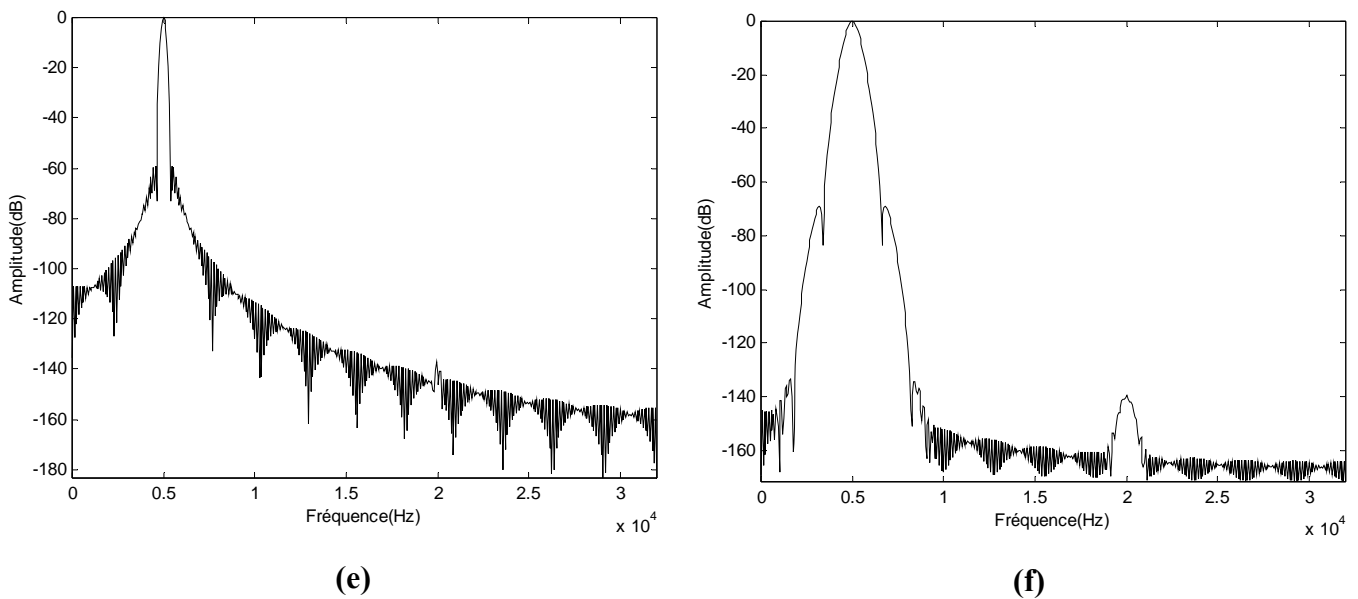
(b)



(c)



(d)



**Figure (III.15):** Comparaison de la fenêtre fractionnaire avec les autres fenêtres au mesure des fréquences. **(a)** :fenêtre rectangulaire. **(b)** :Fenêtre triangulaire. **(c)** :Fenêtre de Hanning. **(d)** : Fenêtre de Hamming. **(e)** : Fenêtre de Blackman. **(f)** : Fenêtre fractionnaire

### III. 5. 2 Le filtrage RIF

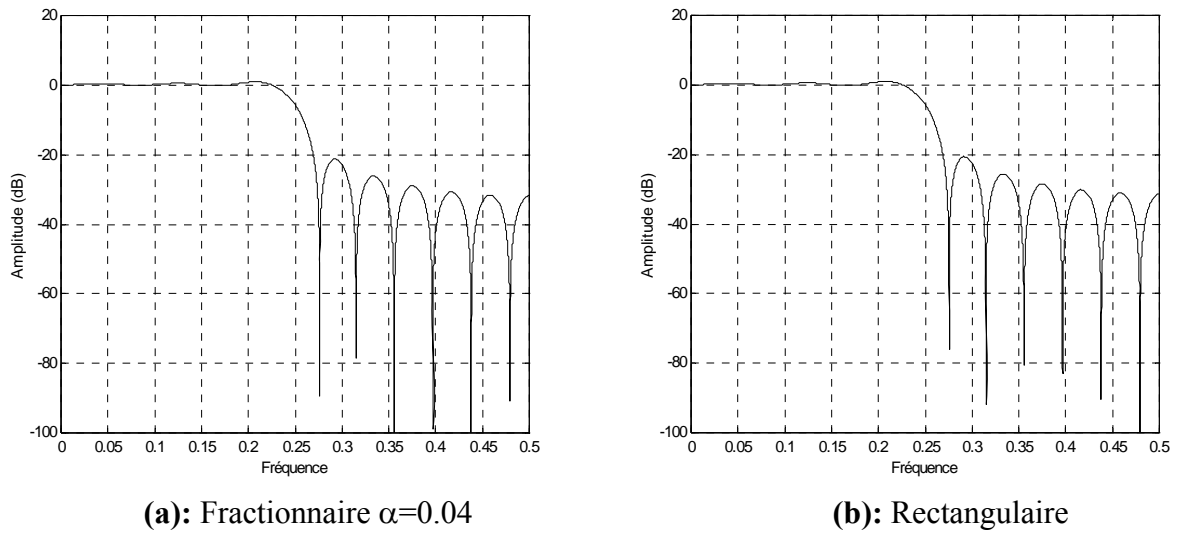
La méthode la plus générale pour concevoir les filtres numériques RIF est la méthode des fenêtres [19]. Les caractéristiques du filtre passe bas conçue par cette méthode, dépend des celles de la fenêtre choisie. Rappelant que la largeur du lobe principal de  $|W(w)|$  augmentera la largeur de la région de transition dans la réponse en fréquence  $|H(w)|$  du filtre passe-bas  $h(k)$  résultant, alors que l'amplitude des lobes secondaires introduira des ondulations et créera des lobes secondaires dans  $|H(w)|$ .

En utilisant une fenêtre  $w(k)$  ayant des lobes secondaires plus faibles, on peut réduire les ondulations et les lobes secondaires de  $|H(w)|$ . Par contre, le lobe principal de  $|W(w)|$  devient alors plus large, ce qui augmente la largeur de la région de transition.

Dans cette situation, la fenêtre fractionnaire peut répondre aux exigences du filtrage RIF, et grâce à sa nature souple elle peut être installée pour satisfaire les caractéristiques du filtre voulu.

Dans un premier pas en fait des comparaisons entre des filtres RIF conçues par la fenêtre fractionnaire et ceux conçues par d'autres fenêtres.

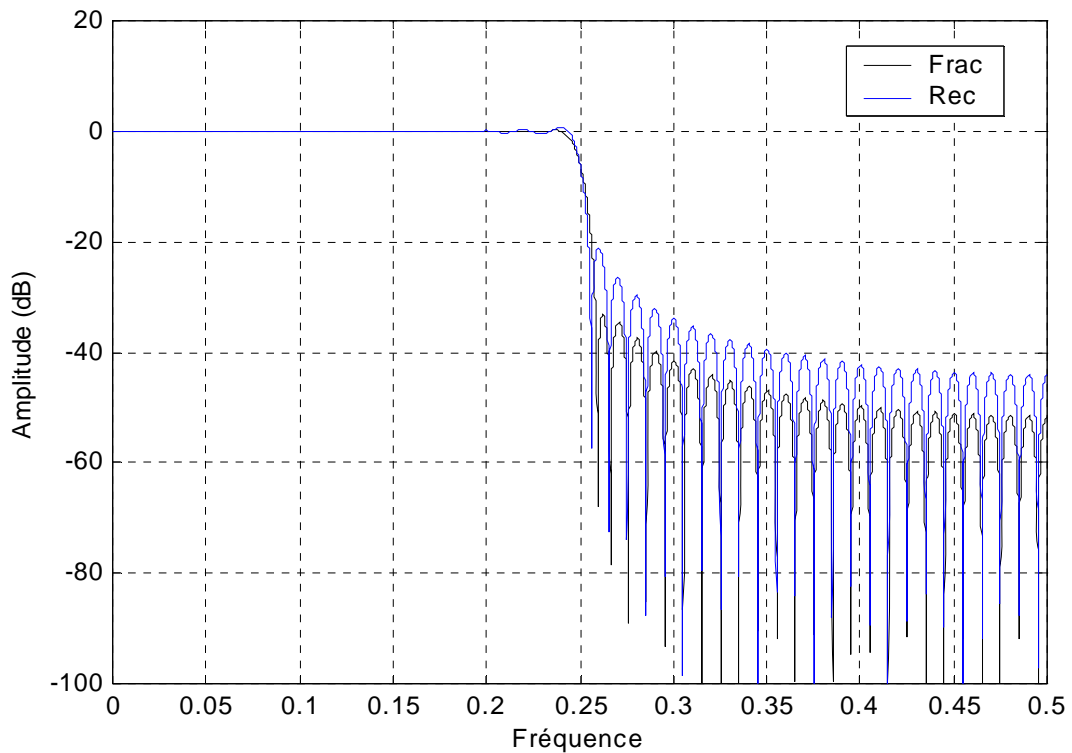
La figure (III. 16) représente un filtre RIF passe-bas conçu par la fenêtre rectangulaire et sont équivalent conçu par la fenêtre fractionnaire, les deux filtres ont une bande d'atténuation d'amplitude maximale de  $-21$ dB.



**Figure (III.16) :** Filtre RIF passe-bas d'ordre 25

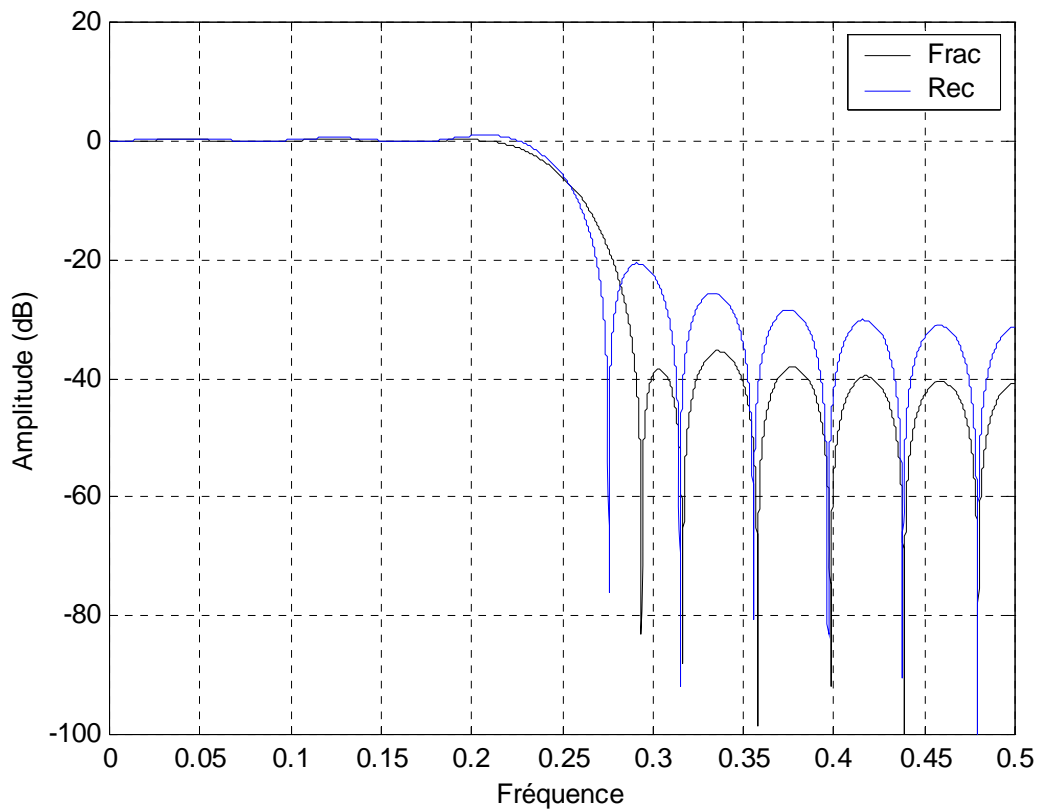
Maintenant si on augmente l'ordre du filtre, en gardant l'ancienne valeur de  $\alpha$  pour la fenêtre fractionnaire, on remarque que le filtre RIF résulte de la fenêtre rectangulaire garde la même atténuation de la bande affaiblie et ce qui change est la fréquence des ondulations. Par contre on observe bien que le nouveau filtre conçu par la fenêtre fractionnaire a une bande affaiblie plus faible que celle obtenue dans la figure III.16, elle est de  $-35$  dB.

La figure (III.17) illustre la différence entre les deux filtres avec un nombre de coefficients égal à 101.



**Figure (III.17):** Variation de la bande affaiblie du filtre RIF en fonction de N

L'exemple précédent, montre que l'atténuation de la bande affaiblie est variée selon l'ordre du filtre. Dans ce qui suit la comparaison se fait selon le paramètre  $\alpha$ . La figure suivante illustre la comparaison d'un filtre obtenu par la fenêtre fractionnaire de  $\alpha=0.18$  et l'autre par la fenêtre rectangulaire, l'ordre est de 25. La figure montre que la bande affaiblie du filtre fractionnaire est atténuée à  $-35$  dB au lieu de  $-21$  dB. La fréquence des ondulations cette fois n'est pas variée.



**Figure (III.18):** Variation de la bande affaiblie du filtre RIF en fonction de  $\alpha$

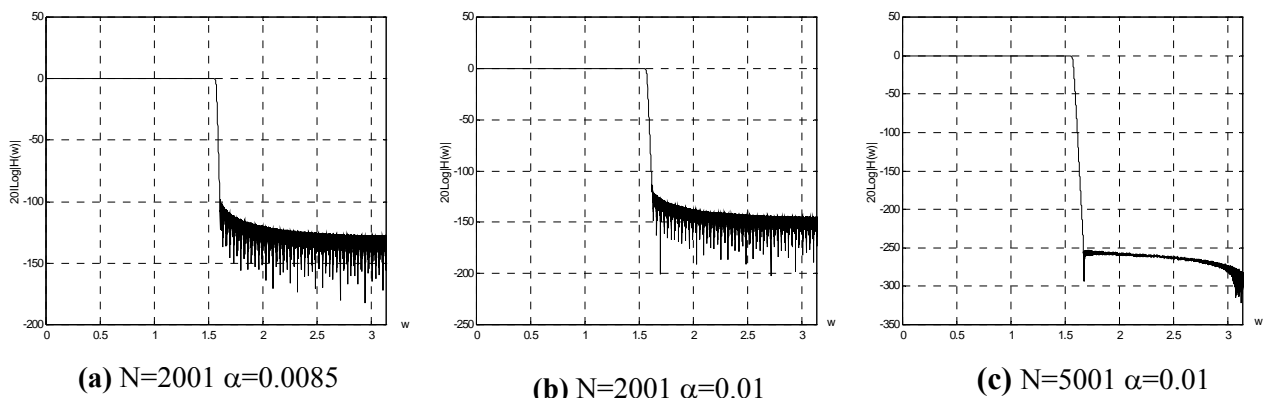
Comme la variation d'amplitude en bande atténuée du filtre dépend de celle des lobes secondaires de la fenêtre. Donc les filtres obtenus par la fenêtre fractionnaire ont une bande atténuée variable.

Le tableau suivant représente la variation en amplitude de la bande atténuée des filtres RIF fractionnaire et les comparés avec les filtres conçus par quelques fenêtres.

$\beta$	Amplitude max de la bande affaiblie	Bande affaiblie équivalente
1	-21 dB	rectangulaire
5.4	-38 dB	Bartlett
6.9	-50 dB	Hanning
8.4	-56 dB	Hamming
11.5	-69 dB	Blackman

**Tableau (III. 7):** Bande affaiblie équivalente du filtre RIF fractionnaire

La figure (III. 19) présente des filtres RIF conçus par la fenêtre fractionnaire. On remarque que la bande atténuée va jusqu'à  $-250\text{dB}$  (Figure III. 19-c).



**Figure (III. 19) :** Filtres RIF conçus par la fenêtre fractionnaire

### III. 6 Conclusion

Ce qui concerne les fenêtres usuelles les caractéristiques sont fixes, chaque fenêtre a des caractéristiques bien précisées, donc une application limitée. Pour la fenêtre fractionnaire, la forme peut être varier en manipulant les paramètres  $N$  et  $\alpha$ . La possibilité de changer la forme de la fenêtre fractionnaire permet de modifier son spectre, ce qui varie ces caractéristiques, donc un champ d'application vaste.

La largeur du lobe principal est limitée, elle ne peut pas être inférieure de  $2/N$  pour toutes les fenêtres [2], mais l'amplitude maximal des lobes secondaire dans le cas de la fenêtre fractionnaire, peut être diminuer aux bas niveaux.

## Conclusion Générale

Le fait de tronquer un signal peut notablement affecter son spectre. La conséquence principale est que les pics s'affaissent ou s'élargissent. Selon la fenêtre de pondération choisie, on privilégiera soit la résolution (largeur des pics), soit la mesure (amplitude des pics). Une bonne fenêtre est caractérisée par un lobe principal étroit et des lobes secondaires de faibles amplitudes. Pour les fenêtres classiques la largeur du lobe principale dépend du nombre d'échantillons  $N$ , mais l'amplitude des lobes secondaires est propre à la fenêtre. En général, l'amélioration de l'un de ces paramètres conduit à la détérioration de l'autre. La fenêtre rectangulaire est celle qui a la plus petite largeur du lobe principale, mais la plus grande amplitude des lobes secondaires. Le choix d'une fenêtre est fait selon le phénomène à étudié ou l'application désirée.

Dans ce mémoire on a introduit une nouvelle fenêtre de pondération qu'on a appelé fenêtre d'ordre fractionnaire dont les caractéristiques dépendent d'un coefficient fractionnaire  $\alpha$ . Une caractéristique de cette fenêtre est que son lobe principal et l'amplitude de ses lobes secondaires dépendent aussi du nombre d'échantillons  $N$ , par contre pour les fenêtres classiques seule la largeur du lobe principal dépende du nombre d'échantillons  $N$ . On trouvé aussi que la largeur du lobe principal est limitée, elle ne peut pas être inférieure à  $2/N$  pour toutes les fenêtres même celle introduite dans ce mémoire, mais l'amplitude maximale des lobes secondaires dans le cas de la fenêtre fractionnaire, peut être diminué aux bas niveaux comparés aux fenêtres classiques. En plus, pilotant la fenêtre fractionnaire par le paramètre  $\beta = \alpha \cdot N$ , on peut réaliser toutes les fenêtres classiques alors on peut utiliser une seule fenêtre qui répond à toutes les applications voulues. Donc à partir de cette fenêtre, il est possible pour une application voulue de réaliser une fenêtre spécifique qui peut se situer entre deux fenêtres classiques en variant le paramètre  $\beta$  dans le bon sens.

Pour la conception des filtres numériques RIF par la méthode de fenêtres, la sélection d'une fenêtre est faite selon les deux paramètres caractérisant cette dernière. Le premier est la largeur du lobe principal de la fenêtre qui contrôle la largeur de la région de transition dans la réponse fréquentielle du filtre passe-bas résultant. Le second est

l'amplitude des lobes secondaires qui introduit des ondulations, dans la bande affaiblie du filtre, qui devront être d'une amplitude la plus faible possible, donc la fenêtre utilisée doit avoir une faible amplitude des lobes secondaire.

Pour ces conditions, la fenêtre fractionnaire par ses spécifications peut répondre à beaucoup d'exigences du filtrage RIF, on peut donc concevoir des filtres RIF ayant une bande affaiblie très réduite.

On a aussi trouvé que la bande affaiblie minimale d'un filtre numérique RIF passe-bas utilisant cette fenêtre dépende du coefficient fractionnaire ainsi que du nombre d'échantillons  $N$ , chose qui n'existe pas pour les fenêtres classiques, c'est-à-dire que la bande affaiblie pour les fenêtres classiques est complètement indépendante du nombre d'échantillons  $N$ .

Comme perspective, je suggère que l'étude se fait plus profondément en introduisant d'autres paramètres dans la formule de représentation de la fenêtre fractionnaire. Aussi, explorer d'autre domaines d'application des fenêtres en utilisant la fenêtre fractionnaire.

# *Références*

- [1] Leland B. Jackson, “Digital Filters and Signal Processing”, Kluwer Academic Publishers Group, Distribution Center, P. O. Box 322, 3300 AH Dordrecht, The Netherlands. Copyright 1986
- [2] Steven W. Smith, “The Scientist and Engineer's Guide to Digital Signal Processing”, copyright © 1997-1999 by California Technical Publishing P.O. Box 502407 San Diego, CA 92150-2407 Second Edition, 1999.
- [3] G. Blanchet, M. Charbit, Traitement numérique du signal, Edition Hermes. Paris, 1998. ISBN 2-86601-667-X.
- [4] D. F. Elliott and K. R. Rao, “Fast transforms-Algorithms, Analyses and Applications”, Academic Press, New-York, 1982.
- [5] Julius O. Smith III, Review of the “Discrete Fourier Transform (DFT)” MUS420/EE367A Lecture 2. Center for Computer Research in Music and Acoustics (CCRMA) Department of Music, Stanford University, Stanford, California 94305, 2004.
- [6] L. J. Van Vliet and M. Van Ginkel, “Fast Fourier Transform (FFT)”. Pattern Recognition Group, Department of Imaging Science and Technology, Faculty of Applied Sciences, Delft University of Technology, Lorentzweg 1, Delft.
- [7] V. Cappellini, A. G. Constantinides and P. Emiliani. “Digital Filters And Their Applications”. Academic Press, INC.
- [8] A. Charef, “Traitement Numérique du Signal”, cours, Module TS 606 Université Constantine 2002-2003.
- [9] F. Cotel, “aide-mémoire de traitement du signal“, ©Dunod, Paris, 2000, ISBN 210005168 7.
- [10] Nezh C. Geckinli, “Some Novel Windows and a Concise Tutorial Comparison of Window Families”, IEEE Transaction on Acoustics, Speech and Signal Processing, vol ASSP-26, NO 6, december 1978.
- [11] Poularikas A. D ”Windows”, The Handbook of formulas and tables for Signal Processing. Ed. Alexander D. Poularikas, Boca Raton: CRC Press LLC, 1999.
- [12] Harris, F. J, “On the use of windows for harmonic analysis with the discrete Fourier transform“, Proc. IEEE, 66, 55-83, January 1978.



- [13] J. Max, "Méthodes et techniques de traitement du signal et applications aux mesures physiques", Tome 1, 3<sup>e</sup> édition, Masson 1981.
- [14] Kunt M, "Traitement Numérique des signaux". Traité d'Electricité, vol XX, Presses Polytechniques Romandes, Lausanne. (1984)
- [15] A. Antoniou, "New Improved Method for The Design of Weighted-Chebyshev, Nonrecursive, Digital Filters", IEEE Transactions on Circuits and Systems, vol. CAS-30, NO. 10, october 1983.
- [16] H.Baher, B.Sc, M.Sc, Sen, "Design of finite-duration impulse response digital and charge-coupled device filters with arbitrary attenuation characteristics, IEE Proceedings Vol. 132, Pt. G, No. 5, october 1985.
- [17] H.Sun, A. Charef, Y.Y. Tsao, and B. Onaral. "Analysis of Polarization Dynamics by Singularity Decomposition Method". Annals of Biomedical Engineering, Vol. 20, 1992.
- [18] Cole, K. S.; Cole, R. H. "Dispersion and absorption in dielectrics, alternation current characterization", J. Chem. Physics 9:341-351; 1941.
- [19] M. Beaufils, M. Rami, "Le Filtrage Numérique". Copyright©Sybex 1986. ISBN 2-7361-0192-8