

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE MENTOURI DE CONSTANTINE
FACULTE DES SCIENCES DE L'INGENIEUR
DEPARTEMENT D'ELECTRONIQUE

N^o d'Ordre :

Série :

MÉMOIRE DE MAGISTER

Présenté par :

Mr Nadir Fergani

Option : Contrôle

Thème :

***Réglage de PID fractionnaire pour une
Réponse désiré en boucle fermée***

Soutenu le : / /2009

Examiné par le jury :

Président	: A.Bennia	Professeur	université de Constantine
Rapporteur	: A.charef	Professeur	université de Constantine
Examineur	: I.bouttamina	Maitre de conférence A	université de Skikda
Examineur	: S.Ladaci	Maitre de conférence B	université de Skikda

Année 2009

Dédicaces

Je dédie ce mémoire

A mes chers parents pour tout les sacrifices consentis, pour leur soutien durant toute mes années d'études.

A mes frères et sœurs.

A tout ma famille.

A tous mes amis.

A tous mes collègues et amis de l'option Contrôle des systèmes.

A tous les membres du laboratoire de Traitement du Signal.

Nadir Fergani.

Remerciement

Je remercie Allah tout puissant qui m'a donné la force et la volonté pour pouvoir finir ce mémoire de magister.

Je tiens à remercier profondément mon encadreur : le professeur ABDELFATAH CHAREF pour la confiance qu'il m'a accordée, ses encouragements, et ses précieux Conseils, et pour leur effort avec moi dans ce travail.

J'exprime ma gratitude envers Pr. BENNIA ABDELHAK professeur à l'université de Mentouri de Constantine de m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury.

Je remercie le Dr. IBRAHIM BOUTTAMINA Maître de Conférences à l'université Mentouri de Constantine de m'avoir accepté de juger ce travail en tant qu'examineur.

Je remercie le Dr. LADACI SAMIR Maître de Conférences à l'université 20 out 1955 de Skikda, d'avoir accepté de juger ce travail en tant qu'examineur.

Je remercie, tous ceux qui m'ont enseigné durant toutes mes études et en particulier mes enseignants à l'université de Constantine et mes enseignants à l'université de Annaba.

Enfin, je tiens aussi à remercier tous ce qui m'a aidé de près ou de loin à la réalisation de ce modeste travail.

Table des matières

Introduction générale	1
Chapitre 1 : opérateur d'ordre fractionnaire	3
I.1 Introduction au calcul fractionnaire	3
I.2 Opérateurs d'ordre fractionnaire	3
I.2.1 Définition de Riemann-Liouville	4
I.2.2 Définition de Grundwald-Leitnikov (G-L)	4
I.2.3 Définition de Caputo	5
I.2.4 Quelques propriétés de la dérivation non entière	5
I.3 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire	6
I.3.1 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire	6
I.3.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire	6
I.4 Méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire	7
I.4.1 Méthode Générale d'approximation des opérateurs intégral-différentiels d'ordre fractionnaire	7
I.4.2 Méthode de Carlson	7
I.4.3 Méthode de Matsuda	8
I.4.4 La méthode d'Oustaloup	8
I.4.5 La méthode de Charef: Fonction de singularité	9
I.4.5.1 Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire	9
I.4.5.2 Approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire	11
I.4.5.3 Implémentation par des circuits électriques analogiques	14
I.5 conclusion	16
Chapitre II : système d'ordre fractionnaire et correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu}$	17

II.1	Système linéaire d'ordre fractionnaire	17
II.2	Approximation par une fonction rationnelle	17
II.3	Réponse temporelle et fréquentielles	18
II.3.1	La réponse impulsionnelle	19
II.3.2	La réponse indicielle	19
II.3.3	Les réponses fréquentielles	20
II.3.4	La fonction de transfert idéal de bode	21
II.4	Performances et Caractéristiques du Système d'ordre Fractionnaire Multiple	24
II.4.1	Spécifications fréquentielles	24
II.4.2	Spécifications temporelles	24
II.5	Contrôleur $PI^\lambda D^\mu$	24
II.5.1	Introduction	24
II.5.2	Approximation du $PI^\lambda D^\mu$ par une fonction rationnelle	25
II.5.3	Implémentation analogique du contrôleur $PI^\lambda D^\mu$	27
II.6	conclusion	30
 Chapitre III : réglage de $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire		31
III.1	introduction	31
III.2	formulation du problème	32
III.3	présentation de la méthode	33
III.3.1	principe de la méthode	33
III.3.2	calcul des valeurs des fonctions $G_d^{(i)}(\omega_u)$	33
III.3.3	calcul des fonctions $C^{(i)}(\omega_u)$ et de $G_o^{(i)}(\omega_u)$	34
III.3.4	calcul des valeurs des fonctions $G_p^{(i)}(\omega_u)$	35
III.3.5	calcul des valeurs des variables X_i	37
III.3.6	calcul des valeurs des paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$	37
III.4	algorithme de réglage des paramètres du correcteur	39

III.4.1 Correcteur d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$	39
III.4.2 Correcteur d'ordre fractionnaire PI^λ	41
III.5 Exemples illustratifs	42
III.5.1 Exemple 1.....	43
III.5.2 Exemple 2.....	45
III.6 conclusion	47
Chapitre IV application commande d'un moteur à courant continu	48
IV.1 introduction	48
IV.2 modélisation du système	48
IV.3 synthèse du contrôleur	51
IV.3.1 cahier des charges	51
IV.3.2 Résultat	51
IV.4 Etude de la robustesse	53
IV.4.1 variation du gain K	53
IV.4.2 variation constante τ_m	57
IV.4.3 variation de K et τ_m	60
IV.5 conclusion.....	62
Conclusion générale	63
Références	64

Table des figures

Figure I-1	Tracés de Bode amplitude et phase de $p^{-0.7}$ et son approximé.....	11
Figure I-2	Tracés de Bode amplitude et phase de $p^{0.35}$ et son approximé	13
Figure I-3	réalisation analogique de l'intégrateur fractionnaire	14
Figure I-4	réalisation analogique de dérivateur fractionnaire	15
Figure II-1	La réponse impulsionnelle du système pour $y=1dB$, $w_n=1$ et $m=1.1, \dots, 1.9$	19
Figure II-2	La réponse indicielle du système pour $y=1dB$, $w_n=1$ et $m=1.1, 1.2, \dots, 1.9$	20
Figure II-3	Tracés de Bode de (2.2) et (2.6) pour plusieurs valeurs de m	21
Figure II-4	boucle de commande idéale de bode	22
Figure II-5	Tracés de Bode amplitude et phase de $L(p)$ pour $1 < m < 2$	22
Figure II-6	réponse indicielle du système (2.20) pour différente valeur de K	23
Figure II-7	régulateur PID et $PI^\lambda D^\mu$	25
Figure II-8	Tracés de Bode amplitude de $PI^{1.7}D^{1.7}$ et son approximé	26
Figure II-9	Tracés de Bode phase de $PI^{1.7}D^{1.7}$ et son approximé	27
Figure II-10	structure du $PI^\lambda D^\mu$	27
Figure II-11	Réalisation analogique de l'action P	27
Figure II-12	Réalisation analogique de l'action I^λ	28
Figure II-13	Réalisation analogique de l'action D^μ	29
Figure II-14	Réalisation analogique du contrôleur $PI^\lambda D^\mu$	29
Figure III-1	Système asservi classique à retour unitaire	32
Figure III-2	Réponse indicielle du système asservi projeté et du model de référence	43
Figure III-3	Tracés de Bode des FTBO du système asservi projeté et du model de référence ..	44
Figure III-4	Réponse indicielle du système asservi projeté et du model de référence	45
Figure III-5	Tracés de Bode des FTBO du système asservi projeté et du model de référence ..	46
Figure IV-2	moteur à courant continu	48

Figure IV-3 schéma d'un moteur à courant continu	49
Figure IV-4 Schéma fonctionnel du moteur à courant continu	50
Figure IV-5 Tracés de Bode de $C_{PID}G(p)$, $C(p)G(p)$ et de $\frac{1}{(\frac{p}{500})^{1.5}}$	52
Figure IV-5 réponse temporelle du système boucle fermée et système désirer	53
Figure IV-6 réponse indicielle du système en boucle fermée pour différent valeur de K	54
Figure IV-7 réponse indicielle du système en boucle fermée pour différent valeur de K (PID classique)	54
Figure IV-8 variation de marge de phase en fonction de gain K	55
Figure IV-9 variation de dépassement en fonction de gain K	55
Figure IV-10 Réponse indicielle du système boucle fermée pour différent valeur de τ_m	58
Figure IV-11 variation de marge de phase en fonction de τ_m	58
Figure IV-12 variation de dépassement en fonction de τ_m	59
Figure IV-13 dépassement en fonction de K et τ_m (correcteur PI^1D^1)	60
Figure IV-14 dépassement en fonction de K et τ_m (correcteur PID classique).....	61

Liste des Tableaux

Tab IV.1 Les différents caractéristiques pour K variant	56
Tab IV.2 différents caractéristiques pour τ_m variant	59
Tab IV.3 Les différentes caractéristiques (cas ou K et τ_m variées)	61

Résumé :

Ce travail porte essentiellement sur les techniques de réglage du contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire, nous avons proposé une nouvelle méthode de réglage qui consiste à rendre le système en boucle fermée équivalent à un système désiré d'ordre fractionnaire, comme un exemple d'application on a utilisé le contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ régler par la méthode proposée dans la commande en position du moteur à courant continu, les résultats obtenus sont comparés avec ceux obtenus avec un PID classique pour démontrer l'efficacité, la robustesse et l'intérêt de l'utilisation du $PI^\lambda D^\mu$.

Introduction générale

Le calcul fractionnaire à son origine en question de l'extension de la signification. L'exemple bien connu de la l'extension de la signification est l'extension de la signification du nombre réel au nombre complexe, un autre exemple est l'extension du factorielle d'un nombre entier au factorielle d'un nombre réel ou complexe. Dans la généralisation de l'intégration et la différentiations la question qui pose est : est ce que on peut fait l'extension du $\frac{d^n y}{dx^n}$ ou n entier à $\frac{d^\alpha y}{dx^\alpha}$ ou α est un réel ou complexe.

Il est clair que jusqu'à une période très récente, une telle notion mathématique n'avait aucune explication réelle ou pratique. Ce n'est qu'au début des années 1950 que les chercher sur les spectres de bruit des semi-conducteurs VanDerZiel (en 1950) et la relaxation diélectrique dans certains liquides Davidson et Cole(en 1951), ont pu mettre à jour des phénomènes naturels dont les modèles faisaient appel à la dérivée d'ordre fractionnaire. Depuis ces découvertes, beaucoup de travaux de recherche scientifique ont montré l'importance des systèmes d'ordre fractionnaire et leur intérêt en mathématique, traitement de signal,...

En automatique, ce n'est qu'au début des années 1990 que le régulateur CRONE (Commande Robuste d'Ordre Non Entier) était proposé par Oustaloup [1.6]. En profitant des propriétés avantageuses des systèmes d'ordre fractionnaire, ce régulateur permettait d'assurer la robustesse de la commande dans une bande de fréquences donnée. Depuis cette initiative, La commande d'ordre fractionnaire captiva l'intérêt de beaucoup de chercheurs. En 1999, Podlubny [3.2] a proposé le régulateur $PI^\lambda D^\mu$ comprenant une intégration fractionnaire d'ordre λ et une dérivation fractionnaire d'ordre μ , élargissant ainsi le champ d'application du calcul fractionnaire à la théorie de la commande ce qui orienté plusieurs chercheur à un nouvelle axe de recherche qui est le réglage du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire [3.11],[3.9],[3.12]...

Alors, l'objectif de ce travaille est de proposée une méthode simple de réglage de correcteur $PI^\lambda D^\mu$, l'approche proposée est basée sur un système désiré en boucle fermé défini par la fonction de transfert irrationnelle suivante :

$\frac{1}{1+(p/\omega_u)^m}$ ou m est nombre réel et $1 < m < 2$, ce système à une propriété de robustesse très importante tell que ce dernier possède un dépassement indépendant de ω_u .

Ce mémoire est décomposé en quatre chapitres organisé de façon suivante :

Le chapitre I est consacré aux notions de base des opérateurs d'ordre fractionnaire, on y présente les définitions mathématiques de la dériver et l'intégrale d'ordre fractionnaire puis leur transformé de Laplace en introduisant les opérateurs d'ordre fractionnaire et les différentes méthodes d'approximation par des fonctions rationnelles avec un grand intérêt à la méthode de Charef [1.3] qui nous avons utilisé dans notre travail.

Le chapitre II présente des notions de base sur les systèmes linéaires fondamentaux d'ordre fractionnaire en présentons les spécifications et caractéristiques du système d'ordre m pour $1 < m < 2$ et leur approximation par une fonction rationnelle on utilise la méthode de Charef [3.8]. puis en fait une présentation du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire, leur approximation et réalisations à l'aide des circuits analogique par la méthode de Charef [3.7].

Le chapitre III présente une nouvelle méthode de réglage du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ basé sur la réponse impulsionnelle du processus avec de exemples illustratif.

Le chapitre IV présente une application de la commande d'ordre fractionnaire, en utilisons le $PI^\lambda D^\mu$ régler par la méthode proposé dans la commande en position du moteur à courant continu, puis l'étude de robustesse du correcteur à été faite, en comparons les résultats avec ceux obtenus par un correcteur classique.

Enfin, une conclusion générale résume les principaux résultats réalisés.

Opérateur d'ordre fractionnaire

I.1 Introduction au calcul fractionnaire

Le calcul fractionnaire est le champ de l'analyse mathématique, l'investigation et l'application des intégrales et des dérivées d'ordre arbitraire. Le calcul fractionnaire peut être considéré comme un sujet ancien et encore nouveau. Ces dernières années l'intérêt considérable pour le calcul fractionnaire a été stimulé par les applications que ce calcul trouve dans les différents domaines de la physique et de l'ingénierie [1.1].

Généralement on sait que les dérivées et les intégrales d'ordre entier ont des interprétations physiques et géométriques claires, qui simplifient de manière significative leur utilisation pour résoudre des problèmes appliqués dans de divers domaines de la science. Puisque l'aspect de l'idée de la différentiation et de l'intégration d'ordre arbitraire (pas nécessairement un nombre entier) n'a aucune interprétation géométrique et physique acceptable sur ces opérations pendant plus de 300 ans, et lorsque l'intégration et la différentiation d'ordre fractionnaire sont des généralisations des notions de l'intégration et de la différentiation d'ordre entière. Pour cette raison, il serait idéal pour avoir de telles interprétations physiques et géométriques d'opérateur d'ordre fractionnaire, qui fourniront également un lien pour savoir des interprétations classiques de différentiation et d'intégration d'opérateur d'ordre entier [1.2].

L'objectif de ce chapitre est de présenter les bases théoriques des opérateurs d'ordre fractionnaire nécessaires pour le développement des chapitres qui suite, tout en rappelant les définitions et les principales propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire.

I.2 Opérateurs d'ordre fractionnaire

Le calcul fractionnaire est une généralisation de l'intégration et de la différentiation à l'opérateur fondamental d'ordre non entier ${}_{t_0}D_t^m$ où t_0 et t sont des limites de l'opération. L'opérateur intégro-différentiel continu est défini comme :

$${}_{t_0}D_t^m = \begin{cases} \frac{d^m}{dt^m} & \Re(m) > 0, \\ 1 & \Re(m) = 0, \\ \int_{t_0}^t (d\tau)^{-m} & \Re(m) < 0, \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

Où $m \in \mathbb{R}$ est l'ordre de l'opération.

Il existe plusieurs définitions mathématiques pour l'intégration et la dérivation d'ordre fractionnaire. Ces définitions ne mènent pas toujours à des résultats identiques mais sont équivalentes pour un large panel de fonctions.

I.2.1 Définition de Riemann-Liouville (R-L)

L'intégrale dite de Riemann-Liouville est définie ainsi :

Définition 1 : Soient C et \Re les anneaux des nombres complexes et réels respectivement et \Re (\cdot) symbolise la partie réelle d'un nombre complexe. Soient $m \in C$ avec $\Re(m) > 0$, $t_0 \in \Re$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0 + \infty [$. L'intégrale d'ordre m de f de borne inférieure t_0 est définie par :

$${}^{RL}I_{t_0}^m f(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(m)} \cdot \int_{t_0}^t (t - \tau)^{m-1} f(\tau) d\tau \quad (I.2)$$

avec $t \geq t_0$ et $\Gamma(\cdot)$ est la fonction gamma d'Euler définie par : $\Gamma(x) = \int_0^{\infty} y^{x-1} e^{-y} dy$, $x > 0$.

Définition 2 : Soient $m \in C$ avec $\Re(m) > 0$, n un entier positif, $t_0 \in \Re$ et f une fonction localement intégrable définie sur $[t_0 + \infty [$. La dérivée d'ordre m de f de borne inférieure t_0 est définie par :

$${}^{RL}D_{t_0}^m f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-m)} \frac{d^n}{dt^n} \cdot \int_{t_0}^t (t - \tau)^{n-m-1} f(\tau) d\tau \quad (I.3)$$

Où le nombre entier n est tel que $(n-1) < m < n$.

Cette dérivée d'ordre fractionnaire peut aussi être définie à partir de l'équation (I.2) comme suit:

$${}^{RL}D_{t_0}^m f(t) = \frac{d^n}{dt^n} \{ I^{(n-m)} f(t) \} \quad (I.4)$$

Remarque : Pour simplifier l'écriture, on notera dans la suite I^λ pour I_0^λ , et D^μ pour D_0^μ .

I.2.2 Définition de Grundwald-Leitnikov (G-L)

La dérivée d'ordre fractionnaire d'ordre $m > 0$ de G-L est donnée par :

$${}^{GL}D_t^m f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^m} \sum_{k=0}^{\left[\frac{t-t_0}{h} \right]} (-1)^k \binom{m}{k} f(t - k.h) \quad (I.5)$$

Où $[.]$ dénote la partie entière d'un nombre réel, h est la période d'échantillonnage et les coefficients $\binom{m}{k}$ sont donnés par :

$$\binom{m}{k} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(k+1)\Gamma(m-k+1)} \quad (\text{I.6})$$

La définition de Gründwald-Leitnikov de l'intégration d'ordre fractionnaire est formulée comme

$$\text{suit :} \quad {}^{GL}I_t^m f(t) = {}^{GL}D_t^{-m} f(t) = \lim_{h \rightarrow 0} h^m \sum_{k=0}^{\left\lfloor \frac{t-t_0}{h} \right\rfloor} (-1)^k \binom{-m}{k} f(t-k.h) \quad (\text{I.7})$$

I.2.3 Définition de Caputo

Caputo a introduit une autre formulation de la dérivée d'ordre fractionnaire définie par

$${}_t^C D_t^m f(t) = {}^\Delta I_t^{n-m} D^n f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-m)} \int_{t_0}^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{m-n+1}} d\tau \quad (\text{I.8})$$

avec n est un entier positif vérifiant l'inégalité $(n-1) < m < n$.

Cette définition peut être formulée également en fonction de la définition de Riemann-Liouville comme suit :

$${}_R D^\mu f(t) = {}_C D^\mu f(t) + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^{k-\mu}}{\Gamma(k-\mu+1)} f^{(k)}(0^+) \quad (\text{I.9})$$

Ce qui peut être décrit autrement par :

$${}_C D^\mu f(t) = {}_R D^\mu \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(0^+) \frac{t^k}{k!} \right) \quad (\text{I.10})$$

I.2.4 Quelques propriétés de la dérivation non entière

Les principales propriétés des opérateurs d'ordre fractionnaire sont les suivantes [1.1]:

1. Si $f(z)$ est une fonction analytique de z , alors sa dérivée d'ordre fractionnaire $D^m f(z)$ est une fonction analytique de z et m .
2. Pour $m = n$, où n est un entier, l'opération $D^m f(z)$ donne le même résultat que la différentiation classique d'ordre entier n .
3. Pour $m = 0$ l'opération $D^m f(z)$ est l'opérateur identité : $D^0 f(z) = f(z)$
4. La différentiation et l'intégration d'ordres fractionnaire sont des opérations linéaires

$$D^m a f(z) + D^m b g(z) = a D^m f(z) + b D^m g(z)$$

5. La loi additive (propriété du semi-groupe)

$$D^\alpha D^\beta f(z) = D^{\alpha+\beta} f(z) \text{ est valable sous certaines contraintes sur la fonction } f(z).$$

6. la dérivée non entière de $f(t)$ nécessite la connaissance de $f(t)$ sur l'intervalle $[t_0, t]$ alors que dans le cas entier, seule la connaissance "locale" de autour de t est nécessaire. Cette propriété

permette d'interpréter les systèmes non entiers comme des systèmes à mémoire longue, les systèmes entiers étant alors interprétables comme des systèmes à mémoire courte.

I.3 Transformée de Laplace des opérateurs d'ordre fractionnaire

Les définitions temporelles des opérateurs différentiels non entiers souffrent d'un formalisme mathématique quelque peu compliqué, mais leur expression dans le domaine de Laplace relève d'une simplicité remarquable, en particulier dans le cas de l'étude de systèmes relaxés à $t=0$.

I.3.1 Transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire

Nous commencerons par la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $m > 0$ définie par (I.2) qu'on peut écrire comme une convolution des

fonctions $g(t) = \frac{1}{\Gamma(m)} t^{m-1}$ et $f(t)$

$$I^m f(t) = D^{-m} f(t) = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^t (t-\tau)^{m-1} f(\tau) d\tau = \frac{1}{\Gamma(m)} t^{m-1} * f(t) \quad (\text{I.11})$$

La transformée de Laplace de la fonction t^{m-1} est [15]:

$$G(p) = L\{t^{m-1}\} = \Gamma(m) p^{-m} \quad (\text{I.12})$$

donc la transformée de Laplace de l'intégrale de Riemann-Liouville

$$L\{I^m [f(t)]\} = p^{-m} F(p) \quad (\text{I.13})$$

De la même façon la transformée de Laplace de l'intégrale d'ordre fractionnaire défini par Gründwald-Leitnikov et Caputo est aussi donné par l'équation (I.13).

I.3.2 Transformée de Laplace de la dérivée d'ordre fractionnaire

Nous citons dans ce qui suit la transformée de Laplace des différentes définitions de la dérivée.

I.3.2.1 Dérivée de Riemann-Liouville

$$L\{D^m f(t)\} = p^m F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k [D^{m-k-1} f(t)]_{t=0} \quad (\text{I.14})$$

Avec $n-1 < m < n$ cette transformée de Laplace de la dérivée de Riemann-Liouville est bien connue. Mais son applicabilité en pratique est limitée à cause de l'absence d'interprétation physique des valeurs limites des dérivées d'ordre fractionnaire pour $t = 0$.

I.3.2.2 Dérivée de Caputo

$$L\{D^m f(t)\} = p^m F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{m-k-1} f^{(k)}(0) \quad (\text{I.15})$$

L'avantage principal de la définition de Caputo par rapport à celle de Riemann-Liouville est qu'elle permet de considérer des conditions initiales conventionnelles faciles à interpréter telles que $y(0) = y_0, y'(0) = y_1$ etc. De plus, la dérivée de Caputo d'un constant est bornée (égale à 0), alors que la dérivée de Riemann-Liouville d'une constante n'est pas bornée à $t = 0$. La seule exception est quand on prend $t = -\infty$ comme point de départ (limite inférieure) dans la définition de Riemann-Liouville. Cependant, quand on s'intéresse à des processus transitoires, on ne peut pas accepter de placer le point de départ à $-\infty$; dans ce cas la définition de Caputo semble être la plus appropriée quand on la compare aux autres.

I.3.2.3 Dérivée de Gröndwald-Leitnikov

$$L\{D^m f(t)\} = p^m F(p) \quad (\text{I.16})$$

Remarque

La résolution des équations différentielles d'ordre fractionnaire avec la transformée de Laplace se fait de la même manière qu'avec les équations différentielles d'ordre entier.

I.4 Méthodes d'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire

Dans ce qui suit nous allons présenter quelque méthode d'approximation de l'opérateur d'ordre fractionnaire, avec un intérêt particulier à la méthode de la fonction singulière [1.3] qui sera entièrement détaillée dans ce chapitre.

I.4.1 Méthode Générale d'approximation des opérateurs intégrò-différentiels d'ordre fractionnaire

En général [1.4], une approximation rationnelle de la fonction $G(p) = p^{-m}, 0 < m < 1$ (Intégration d'ordre fractionnaire dans le domaine de Laplace) peut être obtenue en utilisant l'expansion des fractions continues des fonctions :

$$p^{-m} = \begin{cases} G_h(p) = \frac{1}{(1 + T p)^m}; \\ G_l(p) = \left(1 + \frac{1}{p}\right)^m; \end{cases} \quad (\text{I.17})$$

Où $G_h(p)$ est l'approximation pour les hautes fréquences ($\omega T \gg 1$), et $G_l(p)$ l'approximation pour les basses fréquences ($\omega T \ll 1$).

I.4.2 Méthode de Carlson

Cette méthode se base sur l'hypothèse suivante [1.4] :

$$(G(p))^{1/m} = p \quad (\text{I.18})$$

La méthode de l'itérative de newton mènera à une séquence d'approximations de $G_i(p)$ commencer de la valeur initiale $G_0(p) = 1$, une fonction rationnelle approximée est obtenue sous

la forme :

$$G_i(p) = G_{i-1}(p) \frac{\left(\frac{1}{m} - 1\right)(G_{i-1}(p))^{1/m} + \left(\frac{1}{m} + 1\right)p}{\left(\frac{1}{m} + 1\right)(G_{i-1}(p))^{1/m} + \left(\frac{1}{m} - 1\right)p} \quad (\text{I.19})$$

I.4.3 Méthode de Matsuda

La méthode proposée dans [1.4], est basée sur l'approximation d'une fonction irrationnelle par une fonction rationnelle obtenue par la CFE et l'ajustement de la fonction originale dans un ensemble de points logarithmiquement espacés. En supposant que les points choisis sont $p_k, k = 0, 1, 2, \dots$, l'approximation prend la forme :

$$G(p) = a_0(p) + \frac{p - p_0}{a_1(p) + a_2(p) + a_3(p) + \dots} \quad (\text{I.20})$$

$$\text{Ou } a_i = v_i(p_i), \quad v_0(p) = G(p), \quad v_{i+1} = \frac{p - p_i}{v_i(p) - a_i} \quad (\text{I.21})$$

I.4.4 La méthode d'Oustaloup

La méthode [1.5], [1.6] est basée sur l'approximation de la fonction de la forme:

$$G(p) = p^m, \quad m \in R^+ \quad (\text{I.22})$$

Par la fonction rationnelle suivante :

$$\hat{G}(s) = C \prod_{k=-N}^N \frac{1 + p/\omega_k}{1 + p/\omega'_k} \quad (\text{I.23})$$

En utilisant les formules de synthèse suivantes :

$$\omega'_0 = \alpha^{-0.5} \omega_u ; \quad \omega_0 = \alpha^{0.5} \omega_u \quad (\text{I.24})$$

$$\frac{\omega'_{k+1}}{\omega'_k} = \frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} = \alpha\eta > 1 ; \quad \frac{\omega_{k+1}}{\omega_k} = \eta > 1 ; \quad \frac{\omega_k}{\omega'_k} = \alpha > 0 \quad (\text{I.25})$$

$$N = \frac{\log(\omega_N/\omega_0)}{\log(\alpha\eta)} ; \quad m = \frac{\log \alpha}{\log(\alpha\eta)} \quad (\text{I.26})$$

Avec ω_u la fréquence du gain unité tel que, $\omega_u = \sqrt{\omega_h \omega_b}$ ω_h et ω_b sont les fréquences transitoires hautes, et basse respectivement.

I.4.5 La méthode de Charef : Fonction de singularité

I.4.5.1 Approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire

La fonction de transfert de l'opérateur intégrale d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$G_I(p) = \frac{1}{p^m} \quad (\text{I.27})$$

Avec $p = j\omega$ la fréquence complexe et m est un nombre positif tel que $0 < m < 1$.

Dans une bande de fréquence donnée $[\omega_b, \omega_h]$, cet opérateur d'ordre fractionnaire peut être modelé par un pôle à puissance fractionnaire (PPF) comme suit :

$$G(p) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{p}{\omega_c}\right)^m} \quad (\text{I.28})$$

Si on suppose que pour $\omega \in [\omega_b, \omega_h]$ on a $\omega \gg \omega_c$, on peut écrire :

$$G(p) = \frac{K_I}{\left(\frac{p}{\omega_c}\right)^m} = \frac{K_I \omega_c^m}{p^m} = \frac{1}{p^m} = G_I(p) \quad (\text{I.29})$$

Avec $K_I = (1/\omega_c^m)$ et ω_c est la fréquence de coupure du PPF qui est obtenue à partir de la basse fréquence ω_b par la relation $\omega_c = \sqrt{10^{(\varepsilon/10m)} - 1}$. avec ε est l'erreur maximal permise entre la pente de la réponse fréquentielle de l'opérateur (I.27) et le PPF de l'équation (I.28).

Dans le but de représenter le PPF de l'équation (I.28), et par conséquent l'intégrateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une fonction rationnelle [1.3], [3.7]. La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de -20m dB/dec sur le tracé de Bode du PPF par un nombre de lignes en de zig-zag produisant une alternance de pente -20 dB/de et 0 dB/dec correspondant à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négative du plan p tel que $p_0 < z_0 < p_1 < z_1 < \dots < z_{N-1} < p_N$. D'où l'approximation suivante :

$$G(p) = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{p}{\omega_c}\right)^m} \cong K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{p}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{p}{p_i}\right)} \quad (\text{I.30})$$

Les p_i et les z_i sont les pôles et les zéros de l'approximation. En utilisant une méthode graphique [1.3], les pôles et les zéros de l'approximation s'avèrent sous une forme d'une progression géométrique. Cette méthode graphique d'approximation commence par une erreur d'approximation y en dB et une bande de fréquence d'approximation $\omega_{\max} = 100\omega_h$. Le nombre de pôles d'approximation N est donné par:

$$N = \text{partie entier} \left[\frac{\log\left(\frac{\omega_{\max}}{p_0}\right)}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (\text{I.31})$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$p_i = (ab)^i p_0, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N$$

$$z_i = (ab)^i z_0, \text{ pour } i = 0, 1, \dots, N-1$$

Où a et b sont appelés les rapports de position, leurs expressions en fonction de y et m sont données par :

$$a = 10^{\left(\frac{y}{10(1-m)}\right)}, \quad b = 10^{\left(\frac{y}{10m}\right)}$$

Et le premier pôle p_0 et le premier zéro z_0 sont donnés par:

$$p_0 = \omega_c \sqrt{b}, \quad z_0 = ap_0$$

Afin de connaître la contribution de chaque pôle au processus de relaxation. On doit décomposer la fonction rationnelle en somme de fractions élémentaires :

$$G(p) = K_f \cdot \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{p}{(ab)^i ap_0}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{p}{(ab)^i p_0}\right)} = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{p}{(ab)^i p_0}\right)} \quad (\text{I.32})$$

Où les coefficients h_i sont les résidus et qui sont déterminés par :

$$h_i = K_f \cdot \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^i p_0}{(ab)^j ap_0}\right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left(1 - \frac{(ab)^i p_0}{(ab)^j p_0}\right)} = K_f \cdot \frac{\prod_{j=0}^{N-1} \left(1 - \frac{(ab)^{(i-j)}}{a}\right)}{\prod_{j=0, j \neq i}^N \left(1 - (ab)^{(i-j)}\right)}, \quad i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{I.33})$$

Exemple : la figure (I-1) représente le tracer de bode de la fonction de transfert de l'intégrateur d'ordre 0.7 et son approximée sur la bande $[10^{-2}, 10^2]$ et pour ($y=1$ dB, $\varepsilon=10^{-5}$).

$$G_I(p) = \frac{1}{p^{0.7}} \cong \widehat{G}_I(p) = 2.0845 \cdot 10^3 \frac{\prod_{i=0}^{18} \left(1 + \frac{p}{(4.6060 \cdot 10^{-5} (2.9936)^i)}\right)}{\prod_{i=0}^{19} \left(1 + \frac{p}{(2.1379 \cdot 10^{-5} (2.9936)^i)}\right)}$$

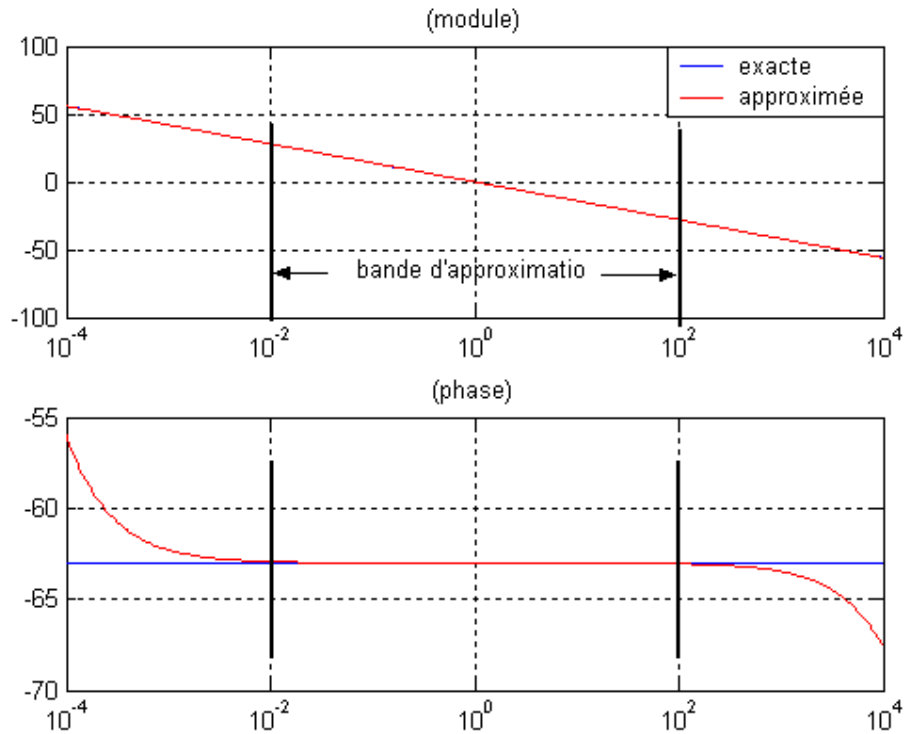


Figure I-1diagramme de bode amplitude et phase de $p^{-0.7}$ et son approximé.

La figure (I-1) montre que la les tracer de bode de la fonction $\frac{1}{p^{0.7}}$ et son approximé sont superpose sur la bande d'approximation, en remarque que l'amplitude est une droite de pente $-20 \times 0.7 = -14 \text{ db/dec}$ et la phase est une constante de $-0.7 \times \frac{\pi}{2} = -63 \text{ deg}$.

I.4.5.2 Approximation de l'opérateur dérivateur d'ordre Fractionnaire

La fonction de transfert de l'opérateur dérivateur d'ordre fractionnaire est représentée dans le domaine fréquentiel par la fonction irrationnelle suivante :

$$G_D(p) = p^m \tag{I.34}$$

Avec $p = j\omega$: la fréquence complexe et m : est un nombre positive tel que $0 < m < 1$. Dans une bande de fréquence donnée $[\omega_b, \omega_h]$ cet opérateur peut être modelé par un zéro à puissance fractionnaire (ZPF) comme suit [3.7]:

$$G(p) = K_D \left(1 + \frac{p}{\omega_c}\right)^m \tag{I.35}$$

Si on suppose que pour $\omega \in [\omega_b, \omega_h]$ on a $\omega \gg \omega_c$, on peut écrire :

$$G(p) = K_D \left(\frac{p}{\omega_c} \right)^m = \frac{K_D}{\omega_c^m} p^m = p^m \quad (I.36)$$

Avec $K_D = \omega_c^m$ et ω_c est la fréquence de coupure de ZPF qui est obtenue à partir de la basse fréquence ω_b par la relation $\omega_c = 0.01\omega_b$.

Dans le but de représenter le zéro d'ordre fractionnaire de l'équation (I.35), et par conséquent le dérivateur d'ordre fractionnaire, par un système linéaire invariant dans le temps, il est nécessaire d'approximer sa fonction de transfert irrationnelle par une rationnelle. La méthode d'approximation consiste à approximer la pente de 20mdB/dec sur le tracé de Bode du ZPF par un nombre de ligne en Zig-Zag produisant une alternance de pente 20 dB/de cet 0 dB/dec correspondant à une alternance de pôles et de zéros sur l'axe réel négative du plan p tel que $z_0 < p_0 < z_1 < p_1 < \dots < z_{N-1} < p_N$ [1.3]. D'où l'approximation suivante :

$$G(p) = K_D \left(1 + \frac{p}{\omega_c} \right)^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N (1 + p/z_i)}{\prod_{i=0}^N (1 + p/p_i)} \quad (I.37)$$

En utilisant une méthode graphique simple [1.3], les pôles et les zéros de l'approximation s'avèrent sous une forme d'une progression géométrique. Cette méthode graphique d'approximation a commencé par une erreur d'approximation y en dB et une bande de fréquence d'approximation $\omega_{\max} = 100\omega_h$. Le nombre de pôles d'approximation N est donné par :

$$N = \text{partie entier} \left[\frac{\log\left(\frac{\omega_{\max}}{z_0}\right)}{\log(ab)} \right] + 1 \quad (I.38)$$

L'arrangement des singularités (pôles-zéros) est établi selon les deux progressions géométriques suivantes :

$$z_i = (ab)^i z_0, \text{ pour } i = 0, 1, 2, \dots, N$$

$$p_i = (ab)^i a z_0, \text{ pour } i = 0, 1, 2, \dots, N$$

Avec : $z_0 = \omega_c \sqrt{b}$ et $p_0 = a z_0$.

Par conséquent, la fonction rationnelle d'approximation dans une bande de fréquence donnée sera :

$$G_D(p) = K_D \left(1 + \frac{p}{\omega_c} \right)^m \cong K_D \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{p}{z_0(ab)^i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{p}{p_0(ab)^i} \right)} \quad (I.39)$$

Pour des raisons concernant la réalisation, on va développer $\frac{G(p)}{p}$ en fonctions élémentaires,

$$\text{alors : } \frac{G_D(p)}{p} = \frac{1}{p} K_D \prod_{i=0}^N \frac{\left(1 + \frac{p}{(ab)^i z_0}\right)}{\left(1 + \frac{p}{(ab)^i az_0}\right)} \quad (\text{I.40})$$

Calculant les résidus des pôles, on obtient :

$$G_D(s) = G_0 + \sum_{i=0}^N \frac{g_i p}{(1 + p / p_i)} \quad (\text{I.41})$$

Avec $G_0 = K_D$, et

$$g_i = K_D \frac{\prod_{j=0}^N (1 - (ab)^{(i-j)} a)}{(- (ab)^i az_0) \prod_{j=0, j \neq i}^N (1 - (ab)^{(i-j)})} \quad \text{Pour } i = 0, 1, \dots, N \quad (\text{I.42})$$

Exemple : la figure (I-2) représente le tracer de bode de la fonction de transfert de dérivateur d'ordre 0.35 et son approximée sur la bande $[10^{-2}, 10^2]$ et pour ($y=1\text{dB}$, $\varepsilon=10^{-5}$).

$$G_D(p) = p^{0.35} \cong \hat{G}_I(p) = 0.0247 \frac{\prod_{i=0}^{19} \left(1 + \frac{p}{(3.564 \cdot 10^{-5} (2.7514)^i)}\right)}{\prod_{i=0}^{19} \left(1 + \frac{p}{(5.079 \cdot 10^{-5} (2.7514)^i)}\right)}$$

La figure (I-2) montre que la les tracer de bode de la fonction $p^{0.35}$ et son approximé sont superpose sur la bande d'approximation, en remarque que l'amplitude est une droite de pente $20 \times 0.35 = 7\text{db/dec}$ et la phase est une constante de $0.35 \times \frac{\pi}{2} = 31.5 \text{ deg}$.

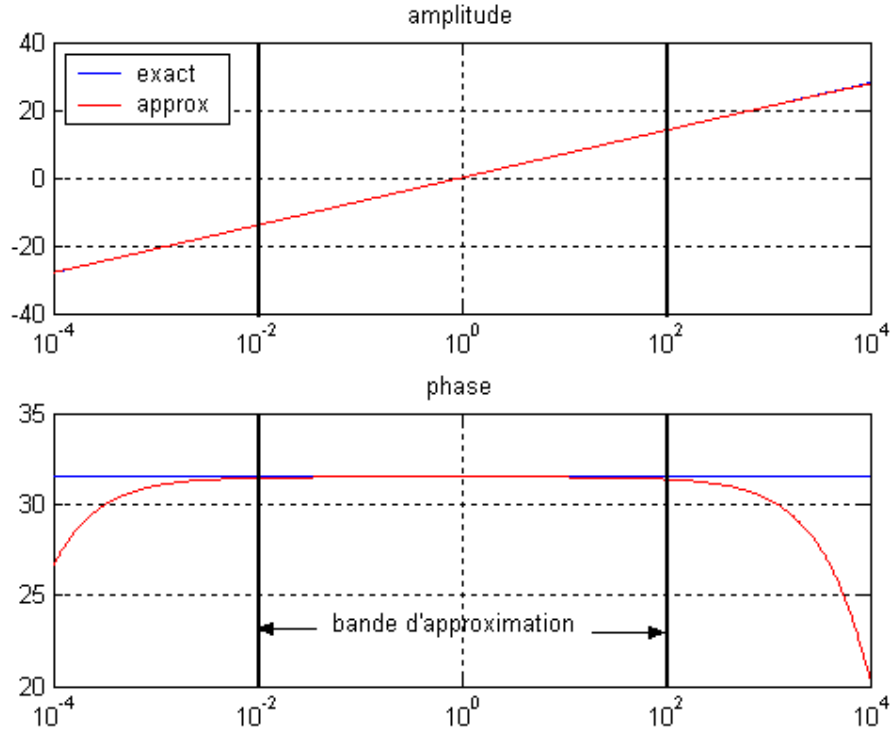


Figure I-2 diagramme de bode amplitude et phase de $p^{0.35}$ et son approximé.

I.4.5.3 Implémentation par des circuits électriques analogiques

L'approximation de l'opérateur intégrateur d'ordre fractionnaire dans une bande fréquentielle donnée par une fonction rationnelle a la forme :

$$G(p) = \frac{1}{p^m} = \frac{K_I}{\left(1 + \frac{p}{\omega_c}\right)^m} \approx K_I \frac{\prod_{i=0}^{N-1} \left(1 + \frac{p}{z_i}\right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{p}{p_i}\right)} \quad (\text{I.43})$$

La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle approximant l'intégrateur d'ordre fractionnaire $G_I(p)$ donne :

$$G(p) = \sum_{i=0}^N \frac{h_i}{\left(1 + \frac{p}{p_i}\right)} \quad (\text{I.44})$$

Avec les h_i sont les résidus des pôles donnés par l'équation (I.33).

Cet équation correspond à l'impédance d'un réseau RC du type Foster 1^{ère} forme dont le schéma est représenté comme suit :

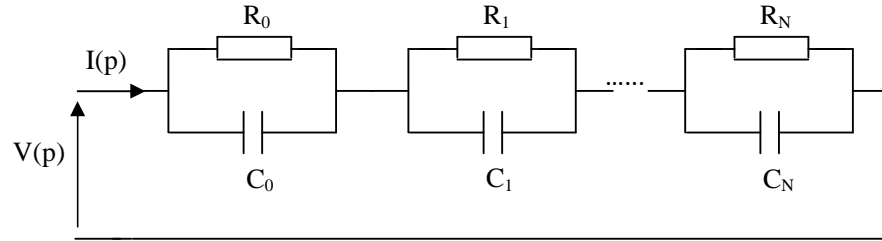


Figure I-3 réalisation analogique de l'intégrateur fractionnaire

L'impédance de ce réseau est :

$$Z(p) = \sum_{i=0}^N \left(\frac{R_i}{1 + pR_iC_i} \right) \quad (\text{I.45})$$

Alors :

$$\left. \begin{array}{l} R_i C_i = \frac{1}{p_i} \\ R_i = h_i \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} R_i = h_i \\ C_i = \frac{1}{p_i h_i} \end{array} \right. \text{ Pour } i=0,1,\dots,N \quad (\text{I.46})$$

De la même façon, l'approximation de l'opérateur dérivée d'ordre fractionnaire dans une bande fréquentielle donnée par une fonction rationnelle a la forme :

$$G(p) = K_D p^m = K_D \cdot \left(1 + \frac{p}{\omega_c} \right)^m = K_D \cdot \frac{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{p}{z_i} \right)}{\prod_{i=0}^N \left(1 + \frac{p}{p_i} \right)} \quad (\text{I.47})$$

La décomposition en éléments simples de la fonction rationnelle approximant le dérivateur d'ordre fractionnaire $G_D(p)$ donne :

$$G(p) = G_0 + \sum_{i=0}^N \frac{g_i p}{\left(1 + \frac{p}{p_i} \right)} \quad (\text{I.48})$$

Avec les g_i sont les résidus des pôles donnés par l'équation (I.42)

Cette équation correspond à l'admittance d'un réseau du type Foster 2^{eme} forme dont le schéma est représenté comme suit :

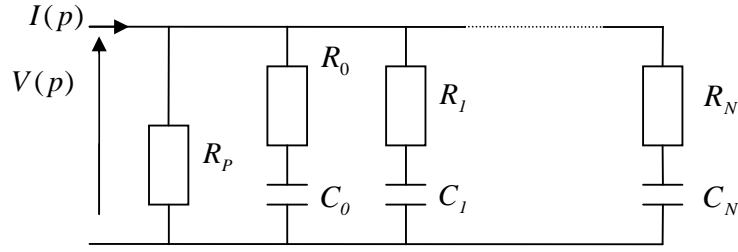


Figure I-4 réalisation analogique de dérivateur fractionnaire

L'admittance de ce réseau est de la forme :

$$Y(p) = \frac{1}{R_p} + \sum_{i=0}^N \frac{pC_i}{1 + pR_iC_i} \quad (\text{I.49})$$

Alors

$$\left. \begin{array}{l} p_i = \frac{1}{R_i C_i} \\ g_i = C_i \\ G_0 = \frac{1}{R_p} \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} C_i = g_i \\ R_i = \frac{1}{g_i p_i} \\ R_p = \frac{1}{G_0} \end{array} \right. \quad \text{pour } i = 0, 1, 2, \dots, N \quad (\text{I.50})$$

Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre quelque définition de base pour la dérivation d'ordre non entier, ainsi sa représentation dans le domaine de Laplace et déférent méthode d'approximation des operateurs d'ordre fractionnaire par des fonctions rationnelles avec un intérêt particulier à la méthode de la fonction singulière qui nous avons utilisé dans les chapitres suivantes, finalement une méthode à été présenter pour la synthèse d'un opérateur d'ordre fractionnaire bornée en fréquence à l'aide d'un circuit analogique.

Système d'ordre fractionnaire et correcteur $PI^\lambda D^\mu$

II.1 Système linéaire d'ordre fractionnaire

Les systèmes linéaires d'ordre fractionnaire sont des systèmes dynamiques linéaires représentés par des équations différentielles linéaires d'ordre fractionnaire dont les ordres de leurs dérivées sont des nombres réelles. L'équation différentielle linéaire fondamentale d'ordre fractionnaire est définie par :

$$(\tau_0)^m \frac{d^m y(t)}{dt^m} + y(t) = e(t) \quad 0 < m < 2 \quad (\text{II.1})$$

Avec : $e(t)$: signal d'entrer.

$Y(t)$: signal de sortie.

τ_0 : Constante de temps.

Il y'a deux type de système fondamentale :

-système d'ordre fractionnaire simple pour $0 < m < 1$.

-système d'ordre fractionnaire multiple pour $1 < m < 2$.

Nous intéresse dans notre étude au deuxième case $1 < m < 2$, ce type des systèmes à un comportement d'un système du deuxième ordre avec poêles conjugue. Plus tard nous avons utilisé ce type des systèmes comme un modèle de référence dans la conception de contrôleur. La fonction de transfert de ce type de systèmes est donnée par la fonction irrationnelle suivante :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{1}{1+(\tau_0 p)^m} \quad 1 < m < 2 \quad (\text{II.2})$$

τ_0 : temps caractéristique de relaxation.

II.2 Approximation par une fonction rationnelle

Dans cette section, on va présenter une méthode d'approximation de charef (2006) [3.8].

La fonction de transfert (II.2) est approximer à la forme de l'équation suivante :

$$G(p) = \frac{1}{1+(\tau_0 p)^m} \approx \frac{(1+\tau_0 p)^{2-m}}{(\tau_0 p)^2 + 2\xi(\tau_0 p) + 1}, \text{ pour } 1 < m < 2 \quad (\text{II.3})$$

$$G(p) = G_N(p)G_D(p)$$

$$G_N(p) = (1 + \tau_0 p)^{2-m} : \text{C'est un ZPF (zéro à puissance fractionnaire).}$$

$$G_D(p) = \frac{1}{(\tau_0 p)^2 + 2\xi(\tau_0 p) + 1} ; \text{C'est un système du second ordre régulier.}$$

On peut facilement montrer que :

$$G(j\omega) = \frac{1}{1+(j\omega\tau_0)^m} \approx \frac{(1+j\omega\tau_0)^{2-m}}{(j\omega\tau_0)^2 + 2\xi(j\omega\tau_0) + 1}, \quad 1 < m < 2$$

Pour $\omega \ll 1/\tau_0$ $|G(j\omega)| = 1 \approx 1$

$$\text{Pour } \omega \gg 1/\tau_0 \quad |G(j\omega)| = \frac{1}{(\omega\tau_0)^m} \approx \frac{(\omega\tau_0)^{2-m}}{(\omega\tau_0)^2} = \frac{1}{(\omega\tau_0)^m}$$

$$\text{Pour } \omega = 1/\tau_0 \quad |G(j\omega)| = \left| \frac{1}{1+(j)^m} \right| \approx \frac{|(1+j)^{2-m}|}{|2j\xi|}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{(1+\cos(\frac{m\pi}{2}))^2 + (\sin(\frac{m\pi}{2}))^2}} = \frac{(\sqrt{2})^{-m}}{\xi}$$

Le facteur d'amortissement est donnée par :

$$\xi = \sqrt{\frac{(1+\cos(\frac{m\pi}{2}))^2 + (\sin(\frac{m\pi}{2}))^2}{2^m}} \Rightarrow \xi = \sqrt{\frac{(1+\cos(\frac{m\pi}{2}))}{2^{m-1}}} \quad (\text{II.4})$$

Le facteur d'amortissement est en fonction de m (l'ordre fractionnaire).

Pour représenter un système d'ordre fractionnaire multiple de l'équation (II.3) par un modèle d'un système linéaire invariant dans le temps, on doit approximer la fonction $G_N(p)$ (le zéro à puissance fractionnaire ZPF) par une fonction rationnelle dans la bande de fréquence $[0, \omega_H]$.

La méthode d'approximation se fait par la méthode de charef [1.3], [3.7].

$$(1 + \tau_0 p)^{2-m} = \frac{\prod_{i=0}^N (1+p/z_i)}{\prod_{i=0}^N (1+p/p_i)} \quad (2.5)$$

Les paramètres a, b, z_0 , p_0 et N peut être déterminé facilement par :

$$a = 10^{\left\lceil \frac{y}{10^{1-(2-m)}} \right\rceil}, \quad b = 10^{\lfloor y/10^{(2-m)} \rfloor}, \quad z_0 = \frac{1}{\tau_0} 10^{\lfloor y/20^{(2-m)} \rfloor}, \quad p_0 = az_0 \text{ et}$$

$$N = \text{entière} \left\lceil \frac{\log(\frac{\omega_{max}}{z_0})}{\log(ab)} \right\rceil + 1$$

$$\text{Les } p_i \text{ et } z_i \text{ calculer par : } \begin{cases} z_i = (ab)^i z_0 & i = 0, 1, \dots, N \\ p_i = (ab)^i az_0 & i = 0, 1, \dots, N \\ \text{ou: } z_0 < p_0 < z_1 < \dots < z_N < p_N \end{cases}$$

En remplaçant l'approximation du ZPF dans l'équation (II.3) on obtient

$$G(p) = \frac{1}{[(\tau_0 p)^2 + 2\xi(\tau_0 p) + 1]} \frac{\prod_{i=0}^N (1+p/z_i)}{\prod_{i=0}^N (1+p/p_i)} \quad (\text{II.6})$$

II.3 Réponse temporelle et fréquentielles :

Par décomposition en éléments simples de (II.6) on obtient la forme suivante :

$$G(p) = \frac{Ap+B}{[(\tau_0 p)^2 + 2\xi(\tau_0 p) + 1]} + \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{(1+\frac{p}{p_i})} \quad (\text{II.7})$$

$$\text{Avec : } B = 1 - \sum_{i=0}^N K_i \quad (\text{II.8})$$

$$A = \frac{-1}{\omega_n^2} \sum_{i=0}^N K_i p_i \quad (\text{II.9})$$

ω_n : La pulsation de résonance ($\omega_n = 1/\tau_0$)

k_i ($i=0, 1, \dots, N$) ; sont les résidus des pôles qui peuvent être calculés comme suit :

$$k_i = \frac{1}{[(a\sqrt{b}(ab)^i)^2 - 2\xi(a\sqrt{b}(ab)^i) + 1]} \frac{\prod_{j=0}^N (1 - a(ab)^{i-j})}{\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^N (1 - (ab)^{i-j})} \quad (\text{II.10})$$

$$\text{La sortie : } Y(p) = G(p)E(p) = \frac{Ap+B}{[(\tau_0 p)^2 + 2\xi(\tau_0 p) + 1]} E(p) + \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{\left(1 + \frac{p}{p_i}\right)} E(p) \quad (\text{II.11})$$

II.3.1 La réponse impulsionnelle

En remplaçons $E(p)=1$ dans l'équation (II.11) on obtient la sortie :

$$Y(p) = \frac{Ap+B}{[(\tau_0 p)^2 + 2\xi(\tau_0 p) + 1]} + \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{\left(1 + \frac{p}{p_i}\right)} \quad (\text{II.12})$$

B , A et k_i sont calculées par les relations (II.8), (II.9) et (II.10) respectivement.

En utilisant la transformée de Laplace inverse, la réponse impulsionnelle de ce système est donnée par la relation suivante :

$$y(t) = \frac{1}{\omega_n} \left(\frac{B^2 - 2AB\xi\omega_n + A^2\omega_n^2}{1 - \xi^2} \right)^{1/2} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \varphi) + \sum_{i=0}^N k_i p_i e^{-p_i t} \quad (\text{II.13})$$

où la phase φ est donnée par:

$$\varphi = \arctg \left(\frac{A - \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}{B - A\xi\omega_n} \right) \quad (\text{II.14})$$

La figure suivante montre le comportement de la réponse impulsionnelle pour plusieurs valeurs de m ($y = 1 \text{ db}$ et $\omega_n = 1$):

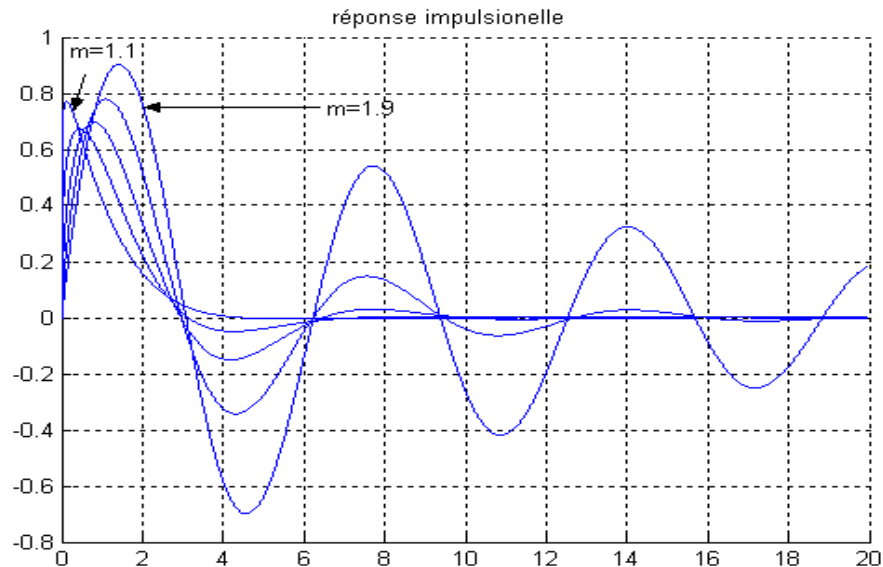


Figure II-1 La réponse impulsionnelle du système pour $m=1.1, 1.3, \dots, 1.9$.

II.3.2 La réponse indicielle

En remplaçons $(E(p)=1/p)$ dans l'équation (II.11), on obtient la formule :

$$Y(p) = \frac{Ap+B}{p[(\tau_0 p)^2+2\xi(\tau_0 p)+1]} + \frac{1}{p} \sum_{i=0}^N \frac{k_i}{\left(1+\frac{p}{p_i}\right)} \quad (\text{II.15})$$

En utilisant la transformée de Laplace inverse, la réponse indicielle de ce système est donnée par la relation suivante :

$$y(t) = 1 + \frac{1}{\omega_n} \left(\frac{B^2 - 2AB\xi\omega_n + A^2\omega_n^2}{1 - \xi^2} \right)^{1/2} e^{-\xi\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1 - \xi^2} t + \varphi_1) - \sum_{i=0}^N k_i p_i e^{-p_i t} \quad (\text{II.16})$$

où la phase φ_1 est donnée par:

$$\varphi_1 = \arctg \left(\frac{A - \omega_n \sqrt{1 - \xi^2}}{B - A\xi\omega_n} \right) - \arctg \left(\frac{\sqrt{1 - \xi^2}}{\xi} \right) \quad (\text{II.17})$$

La figure suivante montre le comportement de la réponse indicielle pour $y = 1db$ et $\omega_n = 1$

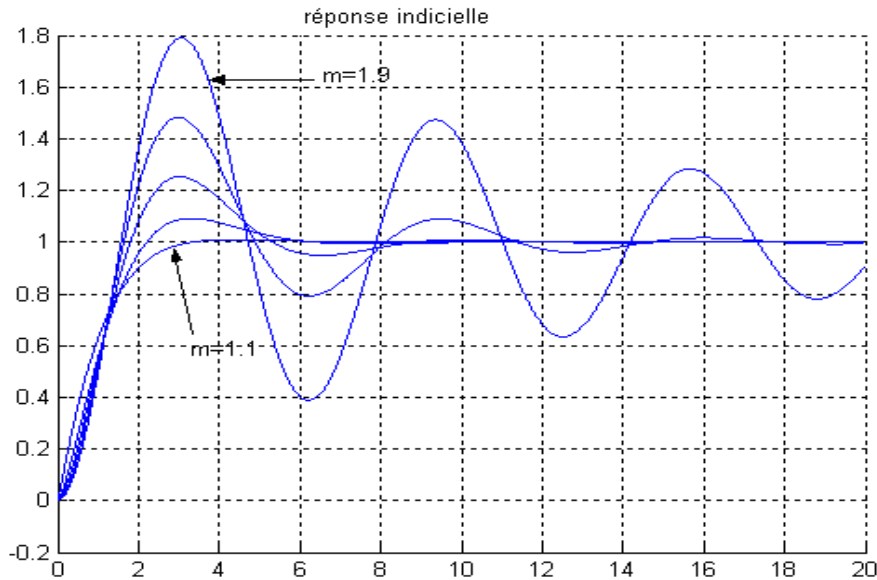


Figure II-2 La réponse indicielle du système pour $t m=1.1, 1.3, \dots, 1.9$.

La figure (II.2) montre que lorsque m tend vers 1, le système se rapproche du système du premier ordre, et les oscillations diminuent. Inversement, lorsque m tend vers 2, le système se rapproche du système du second ordre, et les oscillations augmentent (se rapproche du système du second ordre régulier).

II.3.3 Les réponses fréquentielles

L'expression pour l'analyse fréquentielle de $G(p)$ est :

$$G(j\omega) = \frac{1}{(1+(\omega/\omega_n)^m \cos(m\pi/2)) + j(\omega/\omega_n)^m \sin(m\pi/2)} \quad (\text{II.18})$$

$$G(p) = \frac{1}{1+(\tau_0 p)^m} \approx \frac{(1+\tau_0 p)^{2-m}}{[(\tau_0 p)^2 + 2\xi(\tau_0 p) + 1]}$$

En fait variée m entre 1.1 et 1.9 et on obtient la figure suivante :

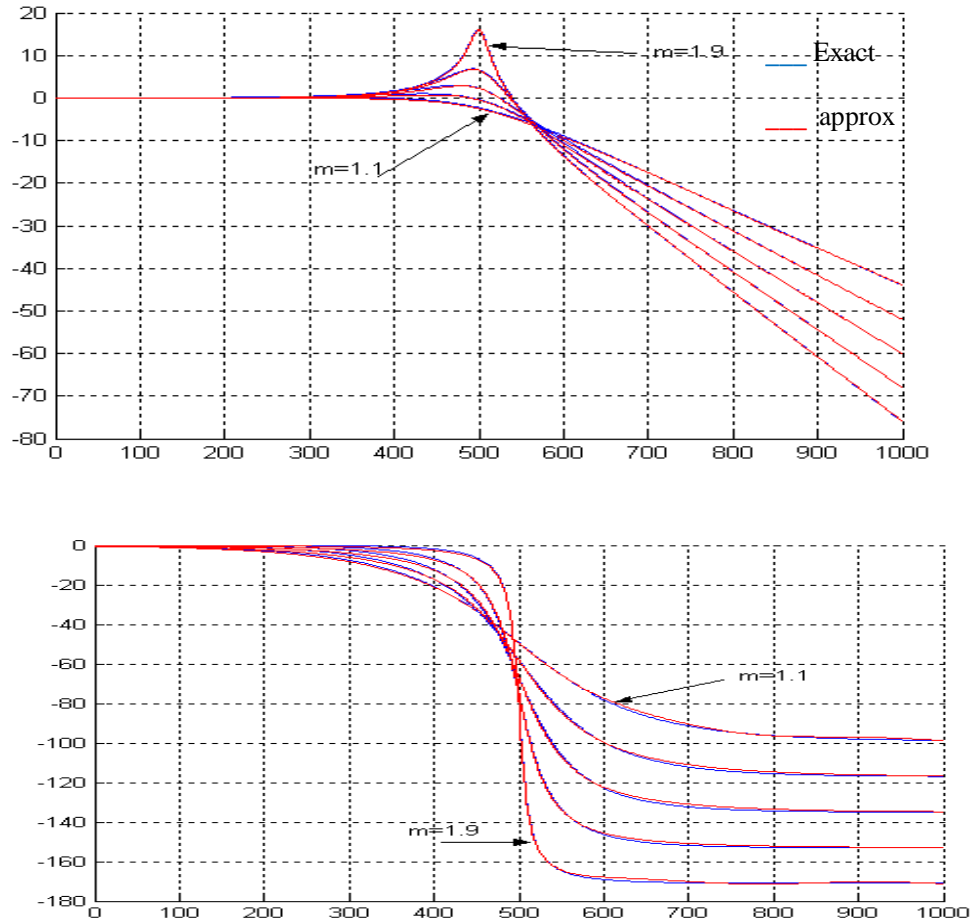


Figure II-3 Tracer de Bode amplitude et phase de (II.2) et (II.6) pour plusieurs valeurs de m .

De la figure (II.3) on remarque que les pentes sont entre -20dB et -40dB en variant l'ordre m . Les deux courbes montre la bonne approximation de la fonction (II.2).

II.3.4 La fonction de transfert idéal de bode :

Bode a proposé une forme idéale de la fonction de transfert de la boucle de commande dans son travail sur la conception de feedbacks amplificateurs (voire fig.II.4), cette fonction de transfert à la forme :

$$L(p) = \left(\frac{\omega_c}{p}\right)^m \quad m \in \mathbb{R}. \quad (\text{II.19})$$

Où ω_c est la fréquence de coupure désirée et le paramètre m la pente de la caractéristique idéale du gain. En fait, la fonction de transfert $L(p)$ est un intégrateur d'ordre fractionnaire pour $m > 0$. Les diagrammes de Bode de $L(p)$ ($1 < m < 2$) sont très simple (figure II.5). La courbe d'amplitude est une ligne droite de pente constante $-20m$ dB / dec, et la courbe de phase est un trait horizontal à $-\pi/2$ rads. La courbe de Nyquist se réduit à une ligne droite passant par l'origine avec $\arg L(j\omega) = -m\pi/2$ rad.

Maintenant considérons le système à retour unitaire représenté sur la figure (II.4) avec $L(p)$ est la fonction de transfert idéal de Bode. Ce choix de $L(p)$ donne un système en boucle fermée avec la propriété souhaitable d'être peu sensible à la variation du gain.

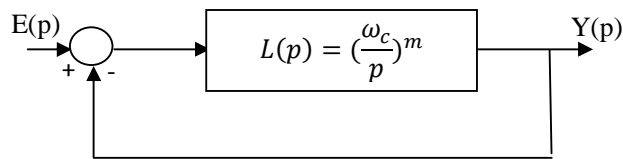


Figure II-4 boucle de commande idéale de Bode.

La fonction de transfert en boucle fermée :

$$H(p) = \frac{Y(p)}{E(p)} = \frac{1}{1+(p/\omega_c)^m} = \frac{K}{K+p^m} \quad \text{avec: } K = \omega_c^m \quad (\text{II.20})$$

(Pour : $1 < m < 2$ en à un système d'ordre fractionnaire multiple).

Ce système à la propriété de robustesse, en termes d'invariance sous changement d'échelle de fréquence [2.1].

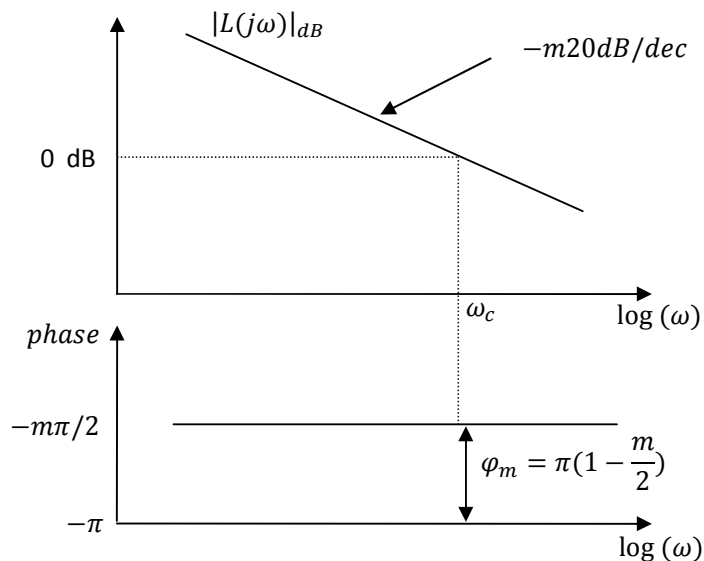


Figure II-5 Tracer de Bode amplitude et phase de $L(p)$ pour $1 < m < 2$.

Les caractéristiques générales de la fonction de transfert de Bode sont les suivantes

a) En boucle ouverte :

- _ Gain : une pente constante de $-m20\text{dB/dec}$,
- _ Fréquence de coupure : une fonction de K ,
- _ Phase : ligne horizontale de $-m \frac{\pi}{2}$.
- _ Nyquist : ligne droite avec un argument $-m \frac{\pi}{2}$.

b) En boucle fermée avec retour unitaire

- La marge du gain est infinie ;
- La marge de phase est constante : $\varphi_m = \pi(1 + \frac{m}{2})$, elle dépend seulement de m .

La figure (II.6) représente la réponse indicielle du système (2.20) pour $m=1.5$ et différente valeur de K ($\tau_0=[0.1 \ 1 \ 10]$ correspond à $K=[31.6228 \ 1 \ 0.036]$) $K = (\frac{1}{\tau_0})^m$.

La figure (II.6) montre qu'on obtient un dépassement de 25.28% indépendant du K , cette propriété est dite iso-amortissement ($\xi = \text{constante} = 0.0526$).

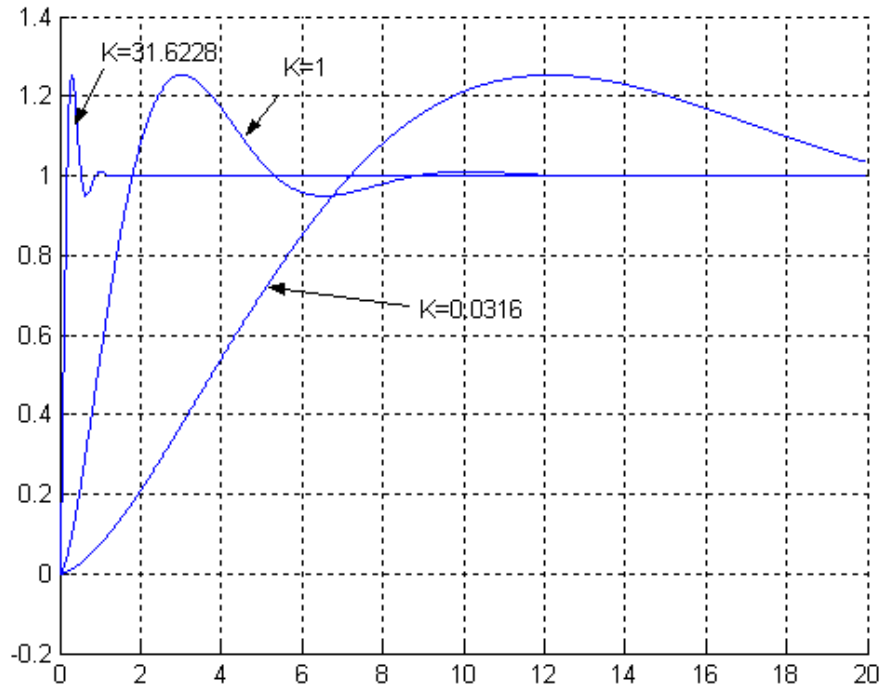


Figure II-6 Réponse indicielle du système (II.20) pour différente valeur de K .

II.4 Performances et Caractéristiques du Système d'ordre Fractionnaire Multiple

Le but fondamental pour la conception des systèmes asservis consiste à répondre aux conditions fixées par le comportement du système projeté. Dans cette partie nous avons cité brièvement les résultats obtenir par [2.2], [2.3].

II.4.1 Spécifications fréquentielles

1. Facteur de qualité :
$$Q = \frac{1}{\sqrt{2(1+\cos\frac{m\pi}{2})}} \quad (\text{II.21})$$

2. Facteur d'amortissement :
$$\xi = \sqrt{\frac{(1+\cos\frac{m\pi}{2})}{2^{m-1}}} \quad (\text{II.22})$$

ξ Dépond seulement de m se qui permet d'introduire la notion de mode oscillatoire robuste [2.4].

3. Pulsation de résonance :
$$\omega_r = \omega_n (-\cos(m\pi/2))^{1/m} \quad (\text{II.23})$$

4. Facteur de résonance :
$$M_r = |G(j\omega_r)| = \frac{1}{\sin(\frac{m\pi}{2})} \quad (\text{II.24})$$

M_r Dépond seulement de m se qui permet d'introduire la notion de résonance robuste [2.4].

II.4.2 Spécifications temporelles

1. Dépassement(%):
$$M_p = (m - 1.005)(m - 0.755) \quad (\text{II.25})$$

2. Le temps de dépassement :
$$tp = \frac{1.118(m-0.252)^2}{(m-0.9)\omega_n} \quad (\text{II.26})$$

3. Temps de réponse
$$ts(2\%) = \frac{4\sqrt{2^{m-1}}}{\omega_n \sqrt{1+\cos(\frac{m\pi}{2})}} = \frac{4}{\xi\omega_n} \quad 1.138 < m < 2 \quad (\text{II.27})$$

4. 4. Le temps de monté :
$$tr \approx \frac{0.135(m+1.158)^2}{(m-0.72)\omega_n} \quad (\text{II.28})$$

II.5 Contrôleur d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$

II.5.1 Introduction :

Afin d'améliorer les performances des systèmes asservis linéaires, les chercheur a proposé une généralisation du contrôleur PID classique à la forme $PI^\lambda D^\mu$ [3.2] appelé PID fractionnaire, où λ et μ sont des réel positifs tel que $0 < \lambda < 1$ et $0 < \mu < 1$, Il a montré que les performances étaient considérablement améliorées par rapport à celles obtenues par un PID d'ordre entier. L'expression analytique du PID fractionnaire est donnée par l'équation suivante :

$$C(p) = K_c + \frac{T_i}{p^\lambda} + T_d p^\mu \quad (\text{II.29})$$

Où K_c : représente l'action proportionnelle.
 T_i/p^λ : représente l'action intégrale d'ordre fractionnaire.
 $T_d p^\mu$: représente l'action dérivation d'ordre fractionnaire.

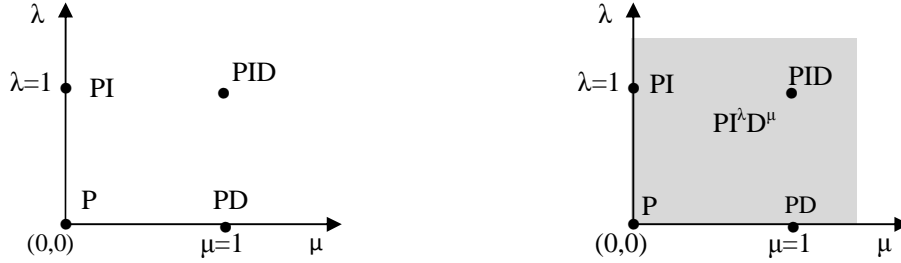


Figure II-7 régulateur PID et $PI^\lambda D^\mu$

Comme il est montré sur la figure (II.7), le $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire généralise le PID conventionnel et l'étend du point au plan. Cette extension donne plus de flexibilité dans la conception des commandes PID. Ce type de correcteur est généralement utilisé dans la conception d'une commande robuste.

II.5.2 Approximation du $PI^\lambda D^\mu$ par une fonction rationnelle

Dans cette partie nous concéderons le cas ou $1 < \lambda < 2$ et $1 < \mu < 2$ l'équation (II.29) devient :

$$C(p) = K_c + \frac{T_i}{p} \left(\frac{1}{p^{m_i}} \right) + T_d p (p^{m_d})$$

$1/p^{m_i}$: est l'opérateur de l'intégrale d'ordre m_i avec : $0 < m_i < 1$

p^{m_d} : est l'opérateur de la dériver d'ordre m_d avec : $0 < m_d < 1$

Dans une bande de fréquence $[\omega_b, \omega_h]$, l'action intégrale et dériver d'ordre fractionnaire est réalisée respectivement par un PPF et ZPF. On obtient l'approximation du $PI^\lambda D^\mu$ par la méthode de charef [3.7] :

$$C(p) = K_c + \frac{T_i}{p} \left(K_I \frac{\prod_{i=0}^{N_I-1} (1+p/z_{I_i})}{\prod_{i=0}^{N_I} (1+p/p_{I_i})} \right) + T_d p \left(K_D \frac{\prod_{i=0}^{N_D} (1+p/z_{D_i})}{\prod_{i=0}^{N_D} (1+p/p_{D_i})} \right) \quad (II.30)$$

Les pôles p_{I_i} , les zéros z_{I_i} et les paramètres K_I et N_I de l'approximation de l'intégrateur d'ordre fractionnaire peuvent être calculé à partir de la section (I.4.5.1).

Les pôles p_{D_i} , les zéros z_{D_i} et les paramètres K_D et N_D de l'approximation de dérivateur d'ordre fractionnaire peuvent être calculé à partir de la section (I.4.5.2).

Exemple illustrative :

Considérons le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ défini par sa fonction de transfert suivante :

$$C(p) = 2.4 + \left(\frac{0.18}{p^{1.7}} \right) + 6 (p^{1.7}) \quad (II.31)$$

Donc :
$$C(p) = 2.4 + \frac{0.18}{p} \left(\frac{1}{p^{0.7}} \right) + 6p (p^{0.7})$$

En obtient l'approximation rationnelle du $PI^\lambda D^\mu$ par l'approximation des operateurs $\frac{1}{p^{0.7}}$ et $p^{0.7}$ sur la même bande fréquentielle $(\omega_L, \omega_H)=[0.1, 10\text{rad/s}]$, les paramètre d'approximation utilisé sont : $\varepsilon=10^{-5}$, $y=1\text{db}$ et $\omega_{\max}=100\omega_L=10^3\text{rad/s}$, les pôles et zéros de l'approximation peuvent calculer à partir de la section (I.4.5.1) et (I.4.5.2).

On obtient la fonction de transfert rationnelle suivante :

$$C(p) = 2.4 + \frac{0.18}{p} \times \left\{ 415.9188 \frac{\prod_{i=0}^{14} \left[1 + \left(\frac{p}{4.6060 \times 10^{-4} (2.9936)^i} \right) \right]}{\prod_{i=0}^{15} \left[1 + \left(\frac{p}{2.1379 \times 10^{-4} (2.9936)^i} \right) \right]} \right\} + 6p \times \left\{ 0.0024 \frac{\prod_{i=0}^{15} \left[1 + \left(\frac{p}{2.1379 \times 10^{-4} (2.9936)^i} \right) \right]}{\prod_{i=0}^{15} \left[1 + \left(\frac{p}{4.6060 \times 10^{-4} (2.9936)^i} \right) \right]} \right\}$$

Les figures (II.8 et II.9) représentent le diagramme de bode amplitude et phase de la fonction de transfert du $PI^{1.7}D^{1.7}$ et son approximation rationnelle, en remarque la bonne approximation sur la bande $[0.1, 10\text{rad/s}]$.

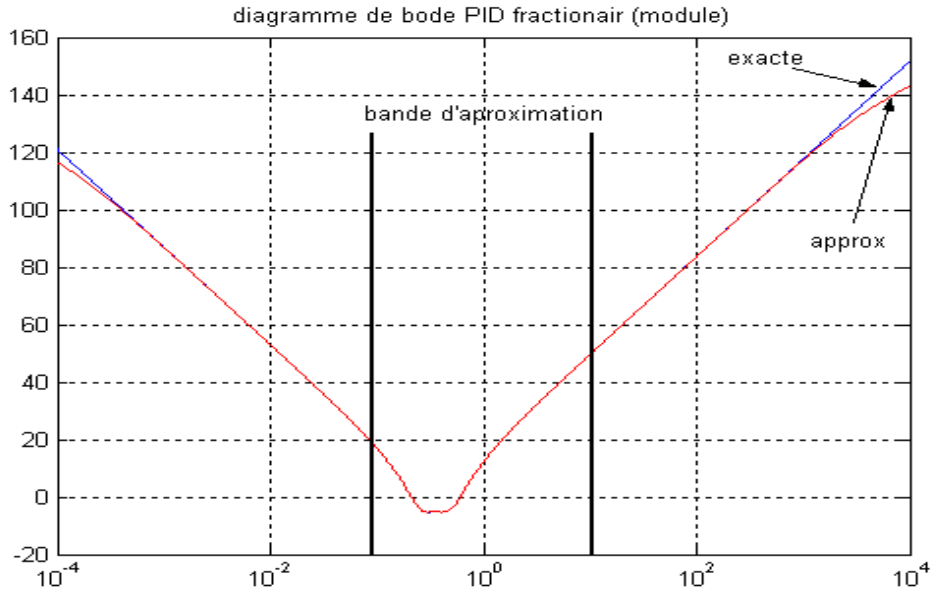


Figure II-8 Tracer de Bode amplitude de $PI^{1.7}D^{1.7}$ et son approximé.

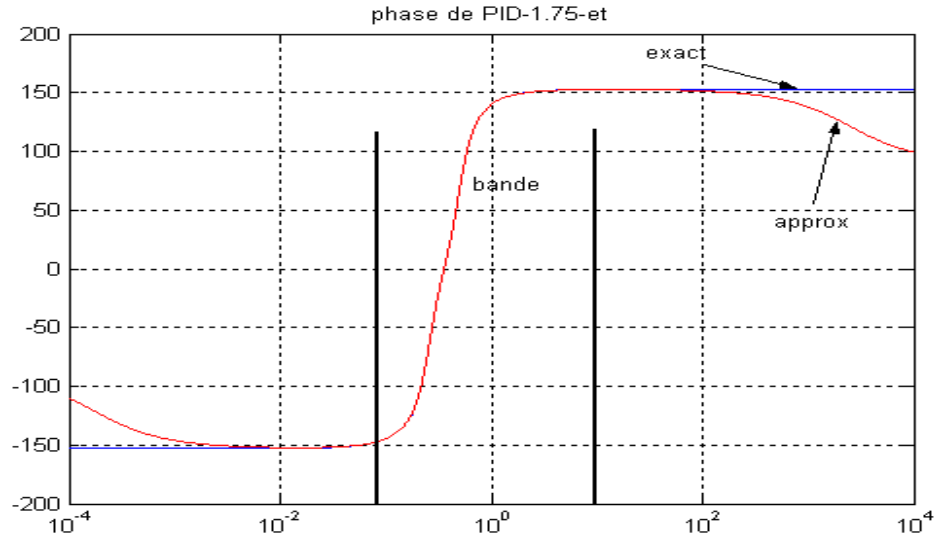


Figure II-9 Tracer de Bode phase de $PI^{1.75}D^{1.75}$ et son approximé.

II.5.3 Implémentation analogique du contrôleur $PI^\lambda D^\mu$:

La structure de $PI^\lambda D^\mu$ est constituée d'une connections parallèle des trois actions, proportionnelle, intégrale et dériver, comme il est montrer par la figure suivante :

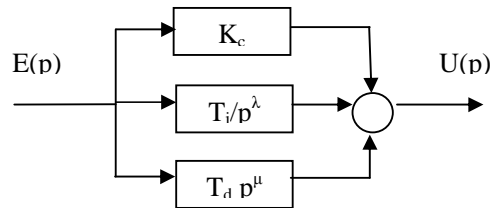


Figure II-10 structure du $PI^\lambda D^\mu$

$$\text{Donc :} \quad C(p) = \frac{U(p)}{E(p)} = \frac{U_p(p)}{E(p)} + \frac{U_I(p)}{E(p)} + \frac{U_D(p)}{E(p)} = k_c + \frac{T_i}{p^\lambda} + T_d p^\mu \quad (\text{II.32})$$

Les 3 éléments du contrôleur peuvent réaliser comme suite :

-l'action proportionnelle peut réaliser par un simple amplificateur comme représenter par la figure(II.11)

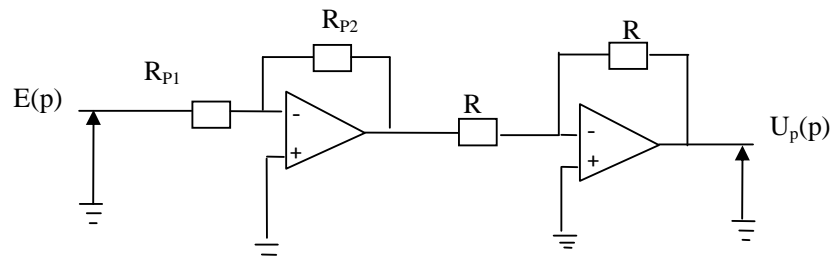


Figure II-11 Réalisation analogique de l'action P.

telle que : $\frac{U_p(p)}{E(p)} = k_c = \frac{R_{p2}}{R_{p1}}$ (R_{p2}, R_{p1} sont des résistances). (II.33)

- l'action intégrale est donnée par le transfert suivant :

$$\frac{T_i}{p^\lambda} = \frac{T_i}{p} \left(K_I \frac{\prod_{i=0}^{N_I-1} (1+p/z_{I_i})}{\prod_{i=0}^{N_I} (1+p/p_{I_i})} \right) \quad (II.34)$$

Cette fonction rationnelle peut décomposer en élément simple, on obtient la fonction :

$$\frac{T_i}{p^\lambda} = \frac{T_i}{p} \left(\sum_{i=0}^{N_I} \frac{k_{I_i}}{(1+\frac{p}{p_{I_i}})} \right) \quad (II.35)$$

Ou les k_{I_i} peut calculer à partir de la section (I.4.5) formule (I.33) .

L'intégrateur fractionnaire est implémenté sur un circuit analogique comme représenter sur la figure suivante:

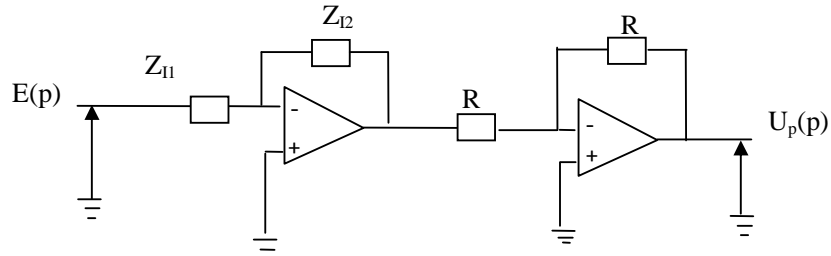


Figure II-12 Réalisation analogique de l'action I^λ

Donc : $\frac{U_I(p)}{E(p)} = \frac{T_i}{p^\lambda} = \frac{Z_{I2}}{Z_{I1}}$

tell que : $Z_{I1} = \left(\frac{1}{T_i}\right)p = L_I p$ est l'impédance d'une bobine d'inductance L_I .

Et : $Z_{I2} = \sum_{i=0}^{N_I} \frac{k_{I_i}}{(1+\frac{p}{p_{I_i}})} = \sum_{i=0}^{N_I} \frac{R_{I_i}}{(1+R_{I_i}C_{I_i}p)}$ est l'impédance du circuit de la fig (I-3).

Avec : $R_{I_i} = k_{I_i}$ et : $C_{I_i} = \frac{1}{k_{I_i}p}$

- l'action dériver est donnée par le transfert suivant :

$$T_d p^\mu = T_d p \left(K_D \frac{\prod_{i=0}^{N_D} (1+p/z_{D_i})}{\prod_{i=0}^{N_D} (1+p/p_{D_i})} \right) \quad (II.36)$$

Cette fonction rationnelle peut décomposer en élément simple, on obtient la fonction :

$$T_d p^\mu = T_d p \left(G_D + \sum_{i=0}^{N_D} \frac{k_{D_i} p}{(1+\frac{p}{p_{D_i}})} \right) \quad (II.37)$$

Ou les k_{D_i} et G_D peut calculer à partir de la section (I.4.5.2) formule (I.42).

Le dérivateur fractionnaire est implémenté sur un circuit analogique comme représenter sur la figure suivante:

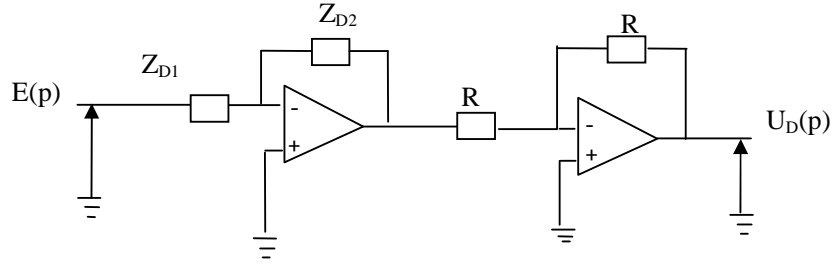


Figure II-13 Réalisation analogique de l'action D^μ .

Donc :

$$\frac{U_D(p)}{E(p)} = T_d p^\mu = \frac{Z_{D2}}{Z_{D1}}$$

tell que :

$$Z_{D2} = T_d p = L_D p \text{ est l'impédance d'une bobine d'inductance}$$

$$L_D = T_d. \quad (\text{II.38})$$

Et :

$$\frac{1}{Z_{D1}} = Y_{D1}(p) = G_D + \sum_{i=0}^{N_D} \frac{k_{D_i} p}{(1 + \frac{p}{p_{D_i}})} = \frac{1}{R_D} + \sum_{i=0}^{N_D} \frac{C_{D_i} p}{(1 + R_{D_i} C_{D_i} p)} \quad (\text{II.39})$$

est l'admittance du circuit de la figure (I-2).

Avec :

$$R_D = \frac{1}{G_D}, \quad C_{D_i} = k_{D_i} \text{ et :} \quad (\text{II.40})$$

$$R_{D_i} = \frac{1}{p_{D_i} k_{D_i}} \quad \text{pour } i=0, 1, \dots, N_D.$$

Alors après réalisation de l'action I^λ et D^μ on peut facilement implémenter le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ comme représenter par la figure (II-14).

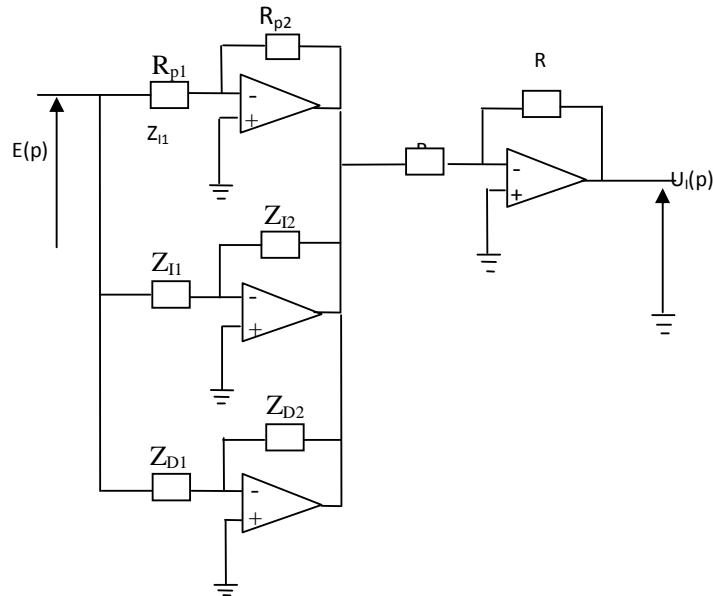


Figure II-14. Réalisation analogique du contrôleur $PI^\lambda D^\mu$

Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques outils mathématiques de base utilisés pour la représentation et la simulation des systèmes d'ordre fractionnaire ainsi que les performances caractéristiques de système fondamental d'ordre fractionnaire multiple puis introduit la notion De la boucle idéal de bode qui possède une propriété très importante (iso-amortissement), grâce à ces propriétés plusieurs chercheur [2.4],[2.5],[3.3] sont utilisée la fonction idéal de bode comme un modèle de référence en boucle ouvert pour la synthèse d'un lois de commande robuste. Après avoir une définition du contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ qui est une généralisation du PID classique, une méthode d'approximation et de réalisation à l'aide des circuits analogiques à été présenté [3.7].

Réglage du Correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre Fractionnaire

III.1 Introduction

Le correcteur PID est la technique la plus utilisée dans la commande des processus industriels pour des décennies. Les raisons majeures de son large acceptation en industrie sont son capacité de commander la majorité des processus, ces actions sont bien comprises et son implémentation est très simple. La conception et le réglage des correcteurs PID a été un sujet de recherche depuis le jour où Ziegler et Nichols ont présenté leur méthode en 1942 [3.1]. Bien que toutes les techniques existantes pour le réglage des paramètres du correcteur PID, un travail de recherche continu et intensif est encore en cours pour le rehaussement de la qualité et l'amélioration des performances de la commande.

Récemment, Podlubny a proposé un correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire [3.2] qui est une généralisation du correcteur PID classique. L'intérêt pour ce type de correcteur est justifié par une meilleure flexibilité dans la conception de la commande puisqu'il a deux paramètres en plus qui sont les ordres fractionnaires des actions d'intégration et de dérivation. Ces paramètres peuvent être utilisés pour satisfaire des performances additionnelles dans la conception des systèmes asservis. Aujourd'hui, les chercheurs s'intéressent au développement des méthodes et techniques de réglage du correcteur $PI^\lambda D^\mu$. Plusieurs méthodes ont été proposées tel que la technique basée sur la fonction transfert idéal de Bode proposée par Djouambi [3.3]. Cette technique consiste à fixer les ordres fractionnaires λ et μ à partir du comportement fréquentielle de la commande en boucle ouverte puis l'estimation des autres paramètres par l'algorithme du moindre carré. Une méthode proposée par Monje [3.4] qui est basée sur la formulation du problème de commande et de robustesse en un problème d'optimisation en cinq inconnus qui sont les cinq paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire. Une amélioration de la méthode précédente a été proposée par Valerio [3.5] où une solution analytique du problème de commande et de robustesse du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ a été déterminée à partir de la réponse indicielle du processus en s'inspirant de la technique de Ziegler et Nichols pour le PID classique.

Dans ce chapitre, nous proposons une méthode de réglage du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ en se basant sur la méthode proposée dans [3.6] pour le réglage du correcteur PID classique. Cette technique utilise la réponse impulsionnelle du processus à asservir supposé stable et elle ne nécessite aucune approximation du processus par un modèle. Les cinq paramètres du correcteur

$PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire sont conçus tel que le système en boucle fermée soit équivalent à un système désiré. Le système désiré utilisé dans ce chapitre est présenté ainsi que ses caractéristiques dans le chapitre précédent.

III.2 Formulation du problème

Considérons le système de commande classique à retour unitaire montré sur la figure (III.1). Où, $G_p(p)$ est la fonction de transfert du processus et $C(p)$ est la fonction de transfert du correcteur.

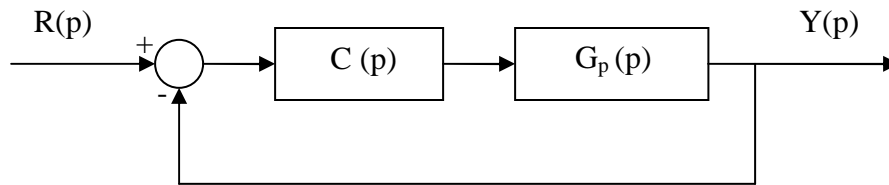


Figure III-1 Système asservi classique à retour unitaire.

Le processus est considéré comme un système stable dont la fonction de transfert $G_p(s)$ est supposée inconnue. $C(p)$ est la fonction de transfert du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire défini comme suit:

$$C(p) = K_C \left(1 + \frac{T_I}{p^\lambda} + T_D p^\mu \right) \quad (\text{III.1})$$

Où K_c , T_I , T_D , λ et μ sont les paramètres du correcteur d'ordre fractionnaire. La fonction de transfert du système en boucle fermée de ce système est donnée par $G_A(p)$ comme :

$$G_A(p) = \frac{Y(p)}{R(p)} = \frac{C(p)G_p(p)}{1 + C(p)G_p(p)} \quad (\text{III.2})$$

Le problème de conception de ce système asservi est donc de régler les cinq paramètres du correcteur d'ordre fractionnaire $C(p)$ pour garantir que la fonction de transfert en boucle fermée se comporte comme un système de référence qui lui-même répond aux spécifications du cahier de charge du système asservi projeté. Le système de référence est lui aussi choisi comme un système d'ordre fractionnaire dont la fonction de transfert $G_d(p)$ est donnée comme suit :

$$G_d(p) = \frac{1}{1 + \left(\frac{p}{\omega_u}\right)^m} \quad (\text{III.3})$$

où $1 < m < 2$ et ω_u est de la fréquence du gain unité. Les paramètres m et ω_u sont choisis pour que ce système de référence répond aux spécifications du cahier de charge du système asservi projeté. Alors, l'objectif de cette conception se résume tout simplement au réglage des cinq paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire pour satisfaire la condition $G_A(p) \cong G_d(p)$.

III.3 Présentation de la méthode

III.3.1 Principe de la méthode

La fonction de transfert $G_A(p)$ du système en boucle fermée de l'équation (III.2) et la fonction de transfert $G_d(p)$ du système de référence de l'équation (III.3) peuvent être développées en série de Taylor-Maclaurin au tour de la fréquence du gain unité ω_u comme suit :

$$G_A(p) = G_A(\omega_u) + (p - \omega_u)G_A^{(1)}(\omega_u) + \frac{(p - \omega_u)^2}{2!}G_A^{(2)}(\omega_u) + \frac{(p - \omega_u)^3}{3!}G_A^{(3)}(\omega_u) + \dots \quad (III.4)$$

$$G_d(p) = G_d(\omega_u) + (p - \omega_u)G_d^{(1)}(\omega_u) + \frac{(p - \omega_u)^2}{2!}G_d^{(2)}(\omega_u) + \frac{(p - \omega_u)^3}{3!}G_d^{(3)}(\omega_u) + \dots \quad (III.5)$$

où $G_A^{(i)}(p)$ et $G_d^{(i)}(p)$ sont, respectivement, les $i^{\text{ième}}$ dérivées des fonctions $G_A^{(i)}(p)$ et $G_d(p)$ par rapport à la variable p . Comme notre objectif est de satisfaire la condition $G_A(p) \cong G_d(p)$, alors par comparaison des équations (III.4) et (III.5) on aura :

$$\begin{cases} G_A(\omega_u) = G_d(\omega_u) \\ G_A^{(1)}(\omega_u) = G_d^{(1)}(\omega_u) \\ G_A^{(2)}(\omega_u) = G_d^{(2)}(\omega_u) \\ G_A^{(3)}(\omega_u) = G_d^{(3)}(\omega_u) \\ G_A^{(4)}(\omega_u) = G_d^{(4)}(\omega_u) \end{cases} \quad (III.6)$$

Alors, la conception du système asservi se résume au réglage des paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire pour satisfaire les cinq égalités de l'équation (III.6).

III.3.2 Calcul des valeurs des fonctions $G_d^{(i)}(\omega_u)$

La fonction de transfert $G_d(p)$ du système de référence est donné dans l'équation (III.3) par :

$$G_d(p) = \frac{1}{1 + \left(\frac{p}{\omega_u}\right)^m}$$

ces dérivées $G_d^{(i)}(\omega_u)$, pour $0 \leq i \leq 4$, par rapport à la variable p au point ω_u sont données par :

$$\begin{aligned} G_d(\omega_u) &= \theta_0 = \frac{1}{2} \\ G_d^{(1)}(\omega_u) &= \theta_1 = -\frac{m}{4\omega_u} \\ G_d^{(2)}(\omega_u) &= \theta_2 = \frac{m}{4\omega_u^2} \\ G_d^{(3)}(\omega_u) &= \theta_3 = \frac{m(m^2 - 4)}{8\omega_u^3} \\ G_d^{(4)}(\omega_u) &= \theta_4 = -\frac{4m(m^2 - 2)}{3\omega_u^4} \end{aligned} \quad (III.7)$$

III.3.3 Calcul des fonctions $C^{(i)}(\omega_u)$ et de $G_o^{(i)}(\omega_u)$

La fonction de transfert $C(p)$ du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ est donné dans l'équation (III.1) par :

$$C(p) = K_c \left(1 + \frac{T_I}{p^\lambda} + T_D p^\mu \right)$$

ces dérivées $C^{(i)}(\omega_u)$, pour $0 \leq i \leq 4$, par rapport à la variable p au point ω_u sont données par :

$$\begin{aligned} C(\omega_u) &= X_0 = K_c + T_I \omega_u^{-\lambda} + T_D \omega_u^\mu \\ C^{(1)}(\omega_u) &= X_1 = \frac{-\lambda T_I}{\omega_u} \omega_u^{-\lambda} + \frac{\mu T_D}{\omega_u} \omega_u^\mu \\ C^{(2)}(\omega_u) &= X_2 = \frac{\lambda(\lambda+1)T_I}{\omega_u^2} \omega_u^{-\lambda} + \frac{\mu(\mu-1)T_D}{\omega_u^2} \omega_u^\mu \\ C^{(3)}(\omega_u) &= X_3 = \frac{-\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)T_I}{\omega_u^3} \omega_u^{-\lambda} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)T_D}{\omega_u^3} \omega_u^\mu \\ C^{(4)}(\omega_u) &= X_4 = \frac{\lambda(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3)T_I}{\omega_u^4} \omega_u^{-\lambda} + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)T_D}{\omega_u^4} \omega_u^\mu \end{aligned} \quad (III.8)$$

Les variables X_i ($0 \leq i \leq 4$) sont fonction des paramètres K_c , T_I , T_D , λ et μ du correcteur $PI^\lambda D^\mu$. Alors il suffit de calculer les cinq variables X_i ($0 \leq i \leq 4$) pour obtenir les cinq paramètres du correcteur d'ordre fractionnaire.

La fonction de transfert en boucle ouverte du système asservi $G_o(p)$ est obtenue à partir de la fonction de transfert en boucle fermée $G_A(p)$, donné dans l'équation (III.2), comme suit :

$$G_o(p) = C(p)G_p(p) = \frac{G_A(p)}{1 - G_A(p)} \quad (III.9)$$

On dénote les dérivées $G_p^{(i)}(\omega_u)$, pour $0 \leq i \leq 4$, de la fonction $G_p(p)$ par rapport à la variable p au point ω_u par :

$$\begin{aligned} G_p(\omega_u) &= Y_0 \\ G_p^{(1)}(\omega_u) &= Y_1 \\ G_p^{(2)}(\omega_u) &= Y_2 \\ G_p^{(3)}(\omega_u) &= Y_3 \\ G_p^{(4)}(\omega_u) &= Y_4 \end{aligned} \quad (III.10)$$

En utilisant les équations (III.6), (III.7) et (III.10), les dérivées $G_o^{(i)}(\omega_u)$, pour $0 \leq i \leq 4$, de la fonction $G_o(p)$ par rapport à la variable p au point ω_u sont données par :

$$\begin{aligned} G_o(\omega_u) &= X_0 Y_0 = \frac{\theta_0}{1-\theta_0} \\ G_o^{(1)}(\omega_u) &= X_1 Y_0 + X_0 Y_1 = \frac{\theta_1}{(1-\theta_0)^2} \\ G_d^{(2)}(\omega_u) &= X_2 Y_0 + 2X_1 Y_1 + X_0 Y_2 = \frac{\theta_2}{(1-\theta_0)^2} + \frac{2\theta_1^2}{(1-\theta_0)^3} \\ G_d^{(3)}(\omega_u) &= X_3 Y_0 + 3X_2 Y_1 + 3X_1 Y_2 + X_0 Y_3 = \frac{\theta_3}{(1-\theta_0)^2} + \frac{6\theta_1\theta_2}{(1-\theta_0)^3} + \frac{6\theta_1^3}{(1-\theta_0)^4} \\ G_d^{(4)}(\omega_u) &= X_4 Y_0 + 4X_3 Y_1 + 6X_2 Y_2 + 4X_1 Y_3 + X_0 Y_4 = \frac{\theta_4}{(1-\theta_0)^2} + \frac{6\theta_2^2 + 8\theta_1\theta_3}{(1-\theta_0)^3} + \frac{36\theta_1^2\theta_2}{(1-\theta_0)^4} + \frac{24\theta_1^4}{(1-\theta_0)^5} \end{aligned} \quad (III.11)$$

III.3.4 Calcul des valeurs des fonctions $G_p^{(i)}(\omega_u)$

On a mentionné que dans cette technique le réglage du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ utilise la réponse impulsionnelle du processus à asservir supposé stable et elle ne nécessite aucune approximation du processus par un model. Alors on a besoin de calculer les valeurs des fonctions $G_p^{(i)}(\omega_u)$, pour $0 \leq i \leq 4$, en fonction de sa réponse impulsionnelle.

La fonction de transfert du processus $G_p(p)$ peut être obtenue à partir de sa réponse impulsionnelle as :

$$G_p(p) = \int_0^{+\infty} g_p(t) e^{-p t} dt \quad (III.12)$$

Le développement en série de Taylor-Maclaurin de la fonction exponentielle e^{-pt} au tour de la fréquence du gain unité ω_u est donné par :

$$e^{-pt} = \left(e^{-\omega_u t} - (p - \omega_u)(t e^{-\omega_u t}) + \frac{(p - \omega_u)^2}{2!} t^2 e^{-\omega_u t} - \frac{(p - \omega_u)^3}{3!} t^3 e^{-\omega_u t} + \dots \right) \quad (\text{III.13})$$

Alors, la fonction de transfert du processus $G_p(p)$ sera :

$$\begin{aligned} G_p(p) &= \int_0^{+\infty} g_p(t) \left(e^{-\omega_u t} - (p - \omega_u)(t e^{-\omega_u t}) + \frac{(p - \omega_u)^2}{2!} t^2 e^{-\omega_u t} - \frac{(p - \omega_u)^3}{3!} t^3 e^{-\omega_u t} + \dots \right) dt \\ G_p(p) &= \int_0^{+\infty} (g_p(t) e^{-\omega_u t}) dt + (p - \omega_u) \left\{ \int_0^{+\infty} (-t g_p(t) e^{-\omega_u t}) dt \right\} + \\ &\quad \frac{(p - \omega_u)^2}{2!} \left\{ \int_0^{+\infty} (t^2 g_p(t) e^{-\omega_u t}) dt \right\} + \frac{(p - \omega_u)^3}{3!} \left\{ \int_0^{+\infty} (-t^3 g_p(t) e^{-\omega_u t}) dt \right\} \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

Le développement en série de Taylor-Maclaurin de la fonction $G_p(p)$ elle-même au tour de la fréquence du gain unité ω_u est donné par :

$$G_p(p) = G_p(\omega_u) + (p - \omega_u) G_p^{(1)}(\omega_u) + \frac{(p - \omega_u)^2}{2!} G_p^{(2)}(\omega_u) + \frac{(p - \omega_u)^3}{3!} G_p^{(3)}(\omega_u) + \dots \quad (\text{III.15})$$

Par identification des équations (III.14) et (III.15), on obtient donc :

$$\begin{aligned} Y_0 &= G_p(\omega_u) = \int_0^{+\infty} g_p(t) e^{-\omega_u t} dt \\ Y_1 &= G_p^{(1)}(\omega_u) = \int_0^{+\infty} -t g_p(t) e^{-\omega_u t} dt \\ Y_2 &= G_p^{(2)}(\omega_u) = \int_0^{+\infty} t^2 g_p(t) e^{-\omega_u t} dt \\ Y_3 &= G_p^{(3)}(\omega_u) = \int_0^{+\infty} -t^3 g_p(t) e^{-\omega_u t} dt \\ Y_4 &= G_p^{(4)}(\omega_u) = \int_0^{+\infty} t^4 g_p(t) e^{-\omega_u t} dt \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

Comme on a considéré que le processus à asservir est stable alors on peut dire que lorsque $t \rightarrow \infty$ on a $g_p(t) \rightarrow 0$. Le temps d'acquisition de la réponse impulsionnelle du processus T_{ac} est généralement choisi très supérieur au temps de réponse du processus. Donc l'équation (III.16) peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}
Y_0 &= G_p(\omega_u) = \sum_{k=0}^N g_p(kT) e^{-kT\omega_u} \\
Y_1 &= G_p^{(1)}(\omega_u) = - \sum_{k=0}^N (kT) g_p(kT) e^{-kT\omega_u} \\
Y_2 &= G_p^{(2)}(\omega_u) = \sum_{k=0}^N (kT)^2 g_p(kT) e^{-kT\omega_u} \\
Y_3 &= G_p^{(3)}(\omega_u) = - \sum_{k=0}^N (kT)^3 g_p(kT) e^{-kT\omega_u} \\
Y_4 &= G_p^{(4)}(\omega_u) = \sum_{k=0}^N (kT)^4 g_p(kT) e^{-kT\omega_u}
\end{aligned} \tag{III.17}$$

Où T est la période d'échantillonnage de la réponse impulsionnelle du processus et le nombre d'échantillons $N = \text{partie entière } \{T_{ac}/T\}$.

III.3.5 Calcul des valeurs des variables X_i

Etant donné les valeurs des paramètres θ_i de l'équations (III.7) et Y_i de l'équations (III.17), pour $0 \leq i \leq 4$, les valeurs des variables X_i peuvent être calculés successivement de l'équation (III.11) comme suit :

$$\begin{aligned}
X_0 &= \frac{\theta_0}{Y_0(1-\theta_0)} \\
X_1 &= \frac{\theta_1}{Y_0(1-\theta_0)^2} - \frac{X_0 Y_1}{Y_0} \\
X_2 &= \frac{\theta_2}{Y_0(1-\theta_0)^2} + \frac{2\theta_1^2}{Y_0(1-\theta_0)^3} - \frac{2X_1 Y_1 + X_0 Y_2}{Y_0} \\
X_3 &= \frac{\theta_3}{Y_0(1-\theta_0)^2} + \frac{6\theta_1\theta_2}{Y_0(1-\theta_0)^3} + \frac{6\theta_1^3}{Y_0(1-\theta_0)^4} - \frac{3X_2 Y_1 + 3X_1 Y_2 + X_0 Y_3}{Y_0} \\
X_4 &= \frac{\theta_4}{Y_0(1-\theta_0)^2} + \frac{6\theta_2^2 + 8\theta_1\theta_3}{Y_0(1-\theta_0)^3} + \frac{36\theta_1^2\theta_2}{Y_0(1-\theta_0)^4} + \frac{24\theta_1^4}{Y_0(1-\theta_0)^5} - \frac{4X_3 Y_1 + 6X_2 Y_2 + 4X_1 Y_3 + X_0 Y_4}{Y_0}
\end{aligned} \tag{III.18}$$

III.3.6 Calcul des valeurs des paramètres du correcteur $PI^\lambda D^\mu$

Une fois les variables X_i , pour $0 \leq i \leq 4$, sont calculés les paramètres K_c , T_I , T_D , λ et μ du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ peuvent être calculés. On dénote par Q_1 et Q_2 les quantités suivantes :

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{-\lambda}{\omega_u} T_I \omega_u^{-\lambda} \\ Q_2 &= \frac{\mu}{\omega_u} T_D \omega_u^\mu \end{aligned} \quad (III.19)$$

En utilisant l'équation (III.8) on peut donc avoir :

$$\begin{aligned} X_0 &= K_c + T_I \omega_u^{-\lambda} + T_D \omega_u^\mu \\ X_1 &= Q_1 + Q_2 \\ X_2 &= -(\lambda + 1) \frac{Q_1}{\omega_u} + (\mu - 1) \frac{Q_2}{\omega_u} \\ X_3 &= (\lambda + 1)(\lambda + 2) \frac{Q_1}{\omega_u^2} + (\mu - 1)(\mu - 2) \frac{Q_2}{\omega_u^2} \\ X_4 &= -(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) \frac{Q_1}{\omega_u^3} + (\mu - 1)(\mu - 2)(\mu - 3) \frac{Q_2}{\omega_u^3} \end{aligned} \quad (III.20)$$

Par manipulation de l'équation (III.20), on peut écrire :

$$\begin{aligned} X_0 &= K_c + T_I \omega_u^{-\lambda} + T_D \omega_u^\mu \\ X_1 &= Q_1 + Q_2 \\ Z_1 &= X_1 + \omega_u X_2 = -\lambda Q_1 + \mu Q_2 \\ Z_2 &= X_1 + 3\omega_u X_2 + \omega_u^2 X_3 = \lambda^2 Q_1 + \mu^2 Q_2 \\ Z_3 &= X_1 + 7\omega_u X_2 + 6\omega_u^2 X_3 + \omega_u^3 X_4 = -\lambda^3 Q_1 + \mu^3 Q_2 \end{aligned} \quad (III.21)$$

Comme les variables Z_i , pour $1 \leq i \leq 3$, dépendent uniquement des variables X_i , pour $0 \leq i \leq 4$, et la fréquence du gain unité ω_u , on peut encore écrire :

$$\begin{aligned} X_0 &= K_c + T_I \omega_u^{-\lambda} + T_D \omega_u^\mu \\ X_1 &= Q_1 + Q_2 \\ \lambda X_1 + Z_1 &= (\lambda + \mu) Q_2 \\ \lambda Z_1 + Z_2 &= \mu(\lambda + \mu) Q_2 \\ \lambda Z_2 + Z_3 &= \mu^2 (\lambda + \mu) Q_2 \end{aligned} \quad (III.22)$$

Des trois dernières égalités de l'équation (III.23), on peut trouver que :

$$\mu = \frac{\lambda Z_1 + Z_2}{\lambda X_1 + Z_1} = \frac{\lambda Z_2 + Z_3}{\lambda Z_1 + Z_2} \quad (III.23)$$

Enfin on aboutit à une équation du second ordre dont la variable est le paramètre λ comme suit :

$$(Z_1^2 - X_1 Z_2) \lambda^2 + (Z_1 Z_2 - X_1 Z_3) \lambda + (Z_2^2 - Z_1 Z_3) = 0 \quad (III.24)$$

En résolvant cette équation on peut avoir une valeur du paramètre λ du correcteur $PI^\lambda D^\mu$. Une fois ce premier paramètre λ calculé on peut alors tirer successivement tous les autres paramètres restants K_c , T_I , T_D et μ . Donc le paramètre μ est facilement calculé de l'équation (III.23) par :

$$\mu = \frac{\lambda Z_1 + Z_2}{\lambda X_1 + Z_1} \quad (III.25)$$

Des équations (III.19) et (III.22), les quantités Q_1 et Q_2 sont égaux aux :

$$\begin{aligned} Q_2 &= \frac{\mu}{\omega_u} T_D \omega_u^\mu = \frac{\lambda X_1 + Z_1}{(\lambda + \mu)} \\ Q_1 &= \frac{-\lambda}{\omega_u} T_I \omega_u^{-\lambda} = X_1 - Q_2 = \frac{\mu X_1 - Z_1}{(\lambda + \mu)} \end{aligned} \quad (III.26)$$

Donc, les deux paramètres T_I et T_D sont donnés par :

$$\begin{aligned} T_D &= \frac{(\lambda X_1 + Z_1) \omega_u^{(1-\mu)}}{[\mu(\lambda + \mu)]} \\ T_I &= -\frac{(\mu X_1 - Z_1) \omega_u^{(1+\lambda)}}{[\lambda(\lambda + \mu)]} \end{aligned} \quad (III.27)$$

Enfin, le paramètre K_c peut être obtenu de l'équation (III.22) comme suit :

$$K_c = X_0 - T_I \omega_u^{-\lambda} - T_D \omega_u^\mu \quad (III.28)$$

III.4 Algorithme de réglage des paramètres du correcteur

III.4.1 Correcteur d'ordre fractionnaire $PI^\lambda D^\mu$:

Pour le réglage des paramètres K_c , T_I , T_D , λ et μ du correcteur d'ordre fractionnaire $C(p) = PI^\lambda D^\mu$ du système asservi de la figure (III.1) afin que sa fonction de transfert en boucle fermée se comporte comme un modèle de référence qui répond aux spécifications du cahier de charge du système asservi projeté :

Données :

- La fréquence du gain unité ω_u du modèle de référence de l'équation (III.3)
- L'ordre fractionnaire de dérivation m du modèle de référence de l'équation (III.3)
- Les valeurs de la réponse impulsionnelle du processus $g_p(kT)$, pour $0 \leq k \leq N$
- Le nombre d'échantillons $N = \text{partie entière } \{T_{ac}/T\}$, avec T_{ac} = temps d'acquisition et T = période d'échantillonnage de la réponse impulsionnelle du processus

Sortie : Valeurs des cinq paramètres K_c , T_I , T_D , λ et μ

Étape 1 : Calculer les variables θ_i , pour $0 \leq i \leq 4$, de l'équation (III.7)

$$\theta_0 = \frac{1}{2}$$

$$\theta_1 = -\frac{m}{4\omega_u}$$

$$\theta_2 = \frac{m}{4\omega_u^2}$$

$$\theta_3 = \frac{m(m^2 - 4)}{8\omega_u^3}$$

$$\theta_4 = -\frac{4m(m^2 - 2)}{3\omega_u^4}$$

Etape 2 : Calculer les variables Y_i , pour $0 \leq i \leq 4$, de l'équation (III.17)

$$Y_0 = \sum_{k=0}^N g_p(kT) e^{-kT\omega_u}$$

$$Y_1 = -\sum_{k=0}^N (kT) g_p(kT) e^{-kT\omega_u}$$

$$Y_2 = \sum_{k=0}^N (kT)^2 g_p(kT) e^{-kT\omega_u}$$

$$Y_3 = -\sum_{k=0}^N (kT)^3 g_p(kT) e^{-kT\omega_u}$$

$$Y_4 = \sum_{k=0}^N (kT)^4 g_p(kT) e^{-kT\omega_u}$$

Etape 3 : Calculer les variables X_i , pour $0 \leq i \leq 4$, de l'équation (III.18)

$$X_0 = \frac{\theta_0}{Y_0(1 - \theta_0)}$$

$$X_1 = \frac{\theta_1}{Y_0(1 - \theta_0)^2} - \frac{X_0 Y_1}{Y_0}$$

$$X_2 = \frac{\theta_2}{Y_0(1 - \theta_0)^2} + \frac{2\theta_1^2}{Y_0(1 - \theta_0)^3} - \frac{2X_1 Y_1 + X_0 Y_2}{Y_0}$$

$$X_3 = \frac{\theta_3}{Y_0(1 - \theta_0)^2} + \frac{6\theta_1\theta_2}{Y_0(1 - \theta_0)^3} + \frac{6\theta_1^3}{Y_0(1 - \theta_0)^4} - \frac{3X_2 Y_1 + 3X_1 Y_2 + X_0 Y_3}{Y_0}$$

$$X_4 = \frac{\theta_4}{Y_0(1 - \theta_0)^2} + \frac{6\theta_2^2 + 8\theta_1\theta_3}{Y_0(1 - \theta_0)^3} + \frac{36\theta_1^2\theta_2}{Y_0(1 - \theta_0)^4} + \frac{24\theta_1^4}{Y_0(1 - \theta_0)^5} - \frac{4X_3 Y_1 + 6X_2 Y_2 + 4X_1 Y_3 + X_0 Y_4}{Y_0}$$

Etape 4 : Calculer les variables Z_i , pour $1 \leq i \leq 3$, de l'équation (III.21)

$$Z_1 = X_1 + \omega_u X_2$$

$$Z_2 = X_1 + 3\omega_u X_2 + \omega_u^2 X_3$$

$$Z_3 = X_1 + 7\omega_u X_2 + 6\omega_u^2 X_3 + \omega_u^3 X_4$$

Etape 5 : Résoudre l'équation (III.24) du second ordre du paramètre λ suivante :

$$(Z_1^2 - X_1 Z_2) \lambda^2 + (Z_1 Z_2 - X_1 Z_3) \lambda + (Z_2^2 - X_1 Z_3) = 0$$

- Choisir la solution convenable ($\lambda > 0$)

Etape 6 : Calculer les paramètres μ , T_D , T_I et K_c des équation (III.25), (III.27) et (III.28)

$$\mu = \frac{\lambda Z_1 + Z_2}{\lambda X_1 + Z_1}$$

$$T_D = \frac{(\lambda X_1 + Z_1) \omega_u^{(1-\mu)}}{[\mu(\lambda + \mu)]}, \quad T_I = -\frac{(\mu X_1 - Z_1) \omega_u^{(1+\lambda)}}{[\lambda(\lambda + \mu)]}$$

$$K_c = X_0 - T_I \omega_u^{-\lambda} - T_D \omega_u^\mu$$

III.4.2 Correcteur d'ordre fractionnaire PI^λ :

Pour le réglage des paramètres K_c , T_I et λ du correcteur d'ordre fractionnaire $C(p) = PI^\lambda$ du système asservi de la figure (III.1) afin que sa fonction de transfert en boucle fermée se comporte comme un modèle de référence qui répond aux spécifications du cahier de charge du système asservi projeté :

Données :

- La fréquence du gain unité ω_u du modèle de référence de l'équation (III.3)
- L'ordre fractionnaire de dérivation m du modèle de référence de l'équation (III.3)
- Les valeurs de la réponse impulsionnelle du processus $g_p(kT)$, pour $0 \leq k \leq N$
- Le nombre d'échantillons $N = \text{partie entière } \{T_{ac}/T\}$, avec T_{ac} = temps d'acquisition et T = période d'échantillonnage de la réponse impulsionnelle du processus

Sortie : Valeurs des cinq paramètres K_c , T_I , et λ

Etape 1 : Calculer les variables θ_i , pour $0 \leq i \leq 2$, de l'équation (III.7)

$$\theta_0 = \frac{1}{2}$$

$$\theta_1 = -\frac{m}{4\omega_u}$$

$$\theta_2 = \frac{m}{4\omega_u^2}$$

Étape 2 : Calculer les variables Y_i , pour $0 \leq i \leq 2$, de l'équation (III.17)

$$Y_0 = \sum_{k=0}^N g_p(kT) e^{-kT\omega_u}$$

$$Y_1 = -\sum_{k=0}^N (kT) g_p(kT) e^{-kT\omega_u}$$

$$Y_2 = \sum_{k=0}^N (kT)^2 g_p(kT) e^{-kT\omega_u}$$

Étape 3 : Calculer les variables X_i , pour $0 \leq i \leq 2$, de l'équation (III.18)

$$X_0 = \frac{\theta_0}{Y_0(1-\theta_0)}$$

$$X_1 = \frac{\theta_1}{Y_0(1-\theta_0)^2} - \frac{X_0 Y_1}{Y_0}$$

$$X_2 = \frac{\theta_2}{Y_0(1-\theta_0)^2} + \frac{2\theta_1^2}{Y_0(1-\theta_0)^3} - \frac{2X_1 Y_1 + X_0 Y_2}{Y_0}$$

Étape 4 : Calculer les paramètres λ , T_1 et K_c comme suit :

$$\lambda = -\frac{\omega_u X_2}{X_1} - 1$$

$$T_1 = -\frac{\omega_u^{(1+\lambda)} X_1}{\lambda}$$

$$K_c = X_0 - T_1 \omega_u^{-\lambda}$$

III.5 Exemples illustratifs :

Après avoir présenté la nouvelle technique pour le réglage du $PI^\lambda D^\mu$, nous allons valider cette méthode pour quelques exemples. Pour l'approximation des opérateurs d'ordre fractionnaire on a utilisé l'approximation de Charef [3.7] et concernant le model de référence on a utilisé le système fondamental d'ordre fractionnaire obtenu par Charef [3.8].

III.5.1 Exemple 1

Comme premier exemple on considère la conception du système asservi à retour unitaire dont la fonction de transfert du processus est donnée comme suit [3.9] :

$$G_p(p) = \frac{0.55}{62p + 1}$$

Le correcteur $C(p)$ utilisé dans ce cas est un correcteur PI^λ d'ordre fractionnaire. Le système asservi projeté (boucle fermée) doit garantir les spécifications suivantes :

- Fréquence du gain unité $\omega_u = 1$ rad/s
- Marge de phase $\phi_m = 80^\circ$

Le modèle de référence qui répond à ces spécifications est donné par :

$$G_d(p) = \frac{1}{1 + p^{1.11}}$$

Le correcteur PI^λ d'ordre fractionnaire obtenu est donné par :

$$C(p) = 50.1701 + \frac{64.0849}{p^{0.2308}}$$

Figure (III.2) représente la réponse indicielle du système asservi projeté en boucle fermée et du model de référence $G_d(p)$.

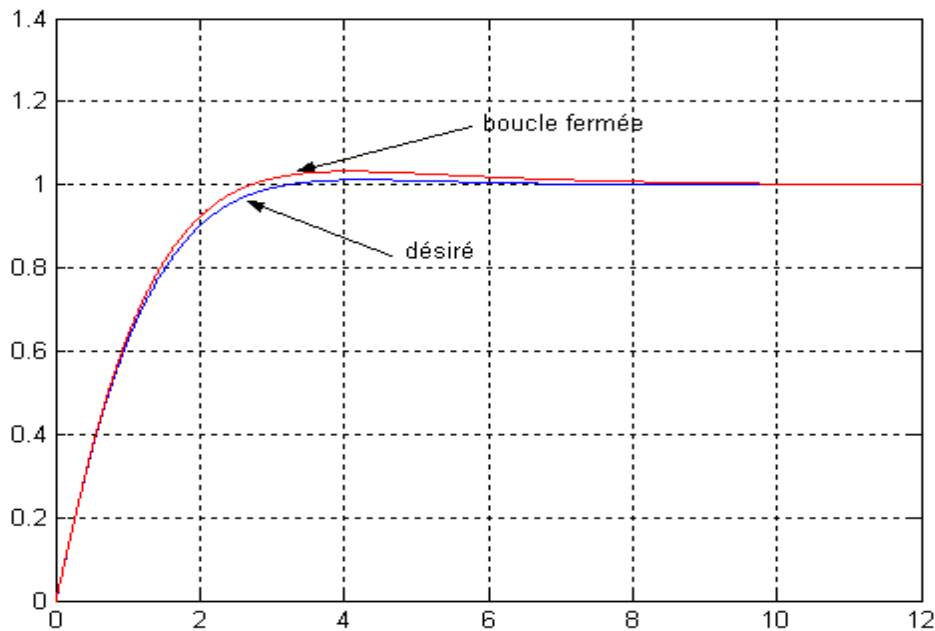


Figure III.2 : Réponse indicielle du système asservi projeté et du model de référence

La fonction de transfert en boucle ouverte du système asservi projeté $G_o(p)$ est donnée par :

$$G_o(p) = C(p)G_p(p) = \left(50.1701 + \frac{64.0849}{p^{0.2308}} \right) \left(\frac{0.55}{62p+1} \right)$$

La fonction de transfert en boucle ouverte $G_{do}(p)$ du model de référence $G_d(p)$ est donné par la fonction de transfert idéale de Bode comme suit :

$$G_{do}(p) = \frac{1}{p^{1.11}}$$

Figure (II.3) représente Les tracés de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte du système asservi projeté et du model de référence.

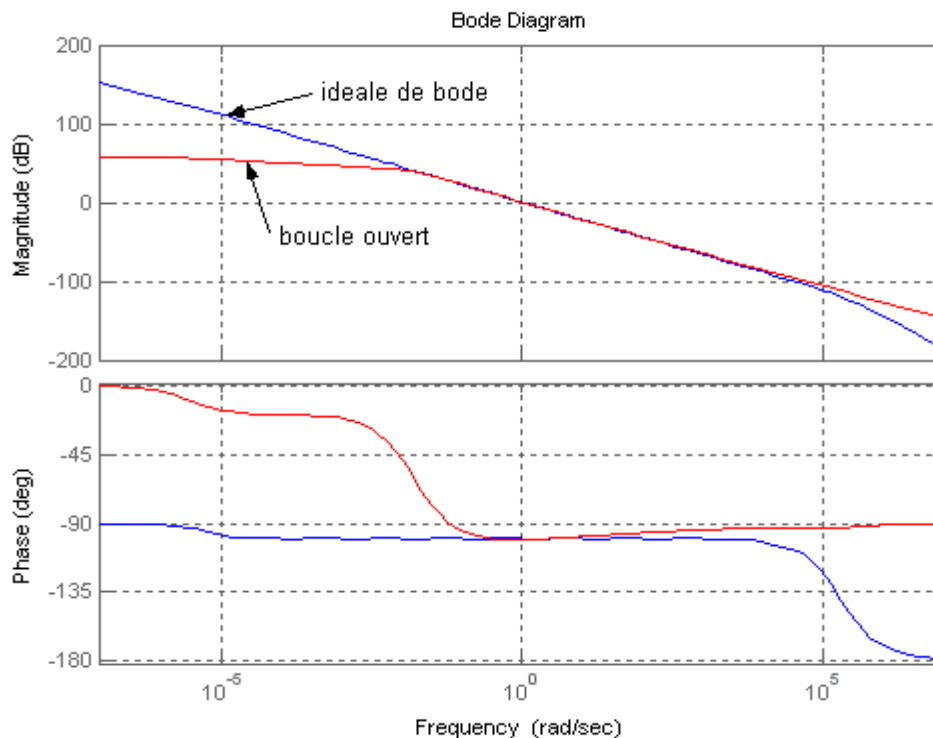


Figure III.3 : Tracés de Bode des FTBO du système asservi projeté et du model de référence

A partir de la figure (III.2), on peut voir que la réponse indicielle du système asservi projeté (en boucle fermée) suit celle du model de référence. A partir de la figure (III.3), le système asservi projeté (en boucle fermée) a une fréquence du gain unité $\omega_u = 0.997$ rad/s et une marge de phase $\phi_m = 79^\circ$. Et on remarque aussi que dans la plage de fréquence $[0.1\omega_u, 10\omega_u]$, la fonction de transfert du système asservi projeté se comporte comme celle du model de référence.

III.5.2 Exemple 2

Comme second exemple on considère la conception du système asservi à retour unitaire dont la fonction de transfert du processus est donnée comme suit [3.10] :

$$G_p(p) = \frac{0.25}{p(p+1)}$$

Le correcteur $C(p)$ utilisé dans ce cas est un correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire. Le système asservi projeté (boucle fermée) doit garantir les spécifications suivantes :

- Fréquence du gain unité $\omega_u = 1$ rad/s
- Marge de phase $\phi_m = 48.5^\circ$

Le modèle de référence qui répond à ces spécifications est donné par :

$$G_d(p) = \frac{1}{1+p^{1.46}}$$

Le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire obtenu est donné par :

$$C(p) = 0.0059 + \frac{3.9970}{p^{0.4613}} + 3.9971 p^{0.5391}$$

Figure (III.4) représente la réponse indicielle du système asservi projeté en boucle fermée et du model de référence $G_d(p)$.

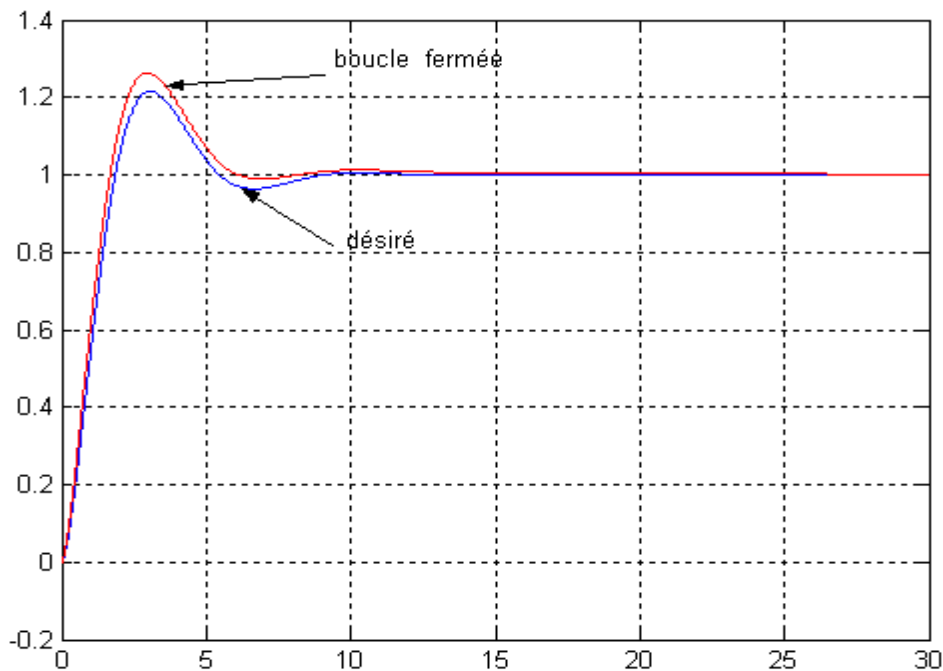


Figure III.4 : Réponse indicielle du système asservi projeté et du model de référence

La fonction de transfert en boucle ouverte du système asservi projeté $G_o(p)$ est donnée par :

$$G_o(p) = C(p)G_p(p) = \left(0.0059 + \frac{3.9970}{p^{0.4613}} + 3.9971 p^{0.5391} \right) \left(\frac{0.25}{p(p+1)} \right)$$

La fonction de transfert en boucle ouverte $G_{do}(p)$ du model de référence $G_d(p)$ est donné par la fonction de transfert idéale de Bode comme suit :

$$G_{do}(p) = \frac{1}{p^{1.46}}$$

Figure (II.5) représente Les tracés de Bode des fonctions de transfert en boucle ouverte du système asservi projeté et du model de référence.

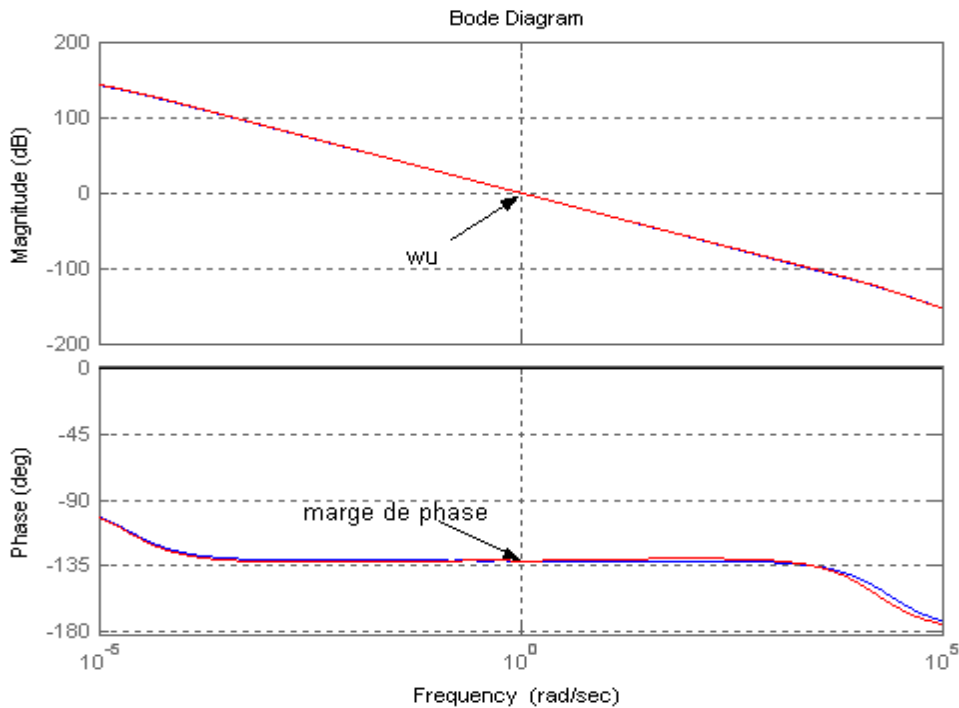


Figure III.5 : Tracés de Bode des FTBO du système asservi projeté et du model de référence

A partir de la figure (III.4), on peut voir que la réponse indicielle du système asservi projeté (en boucle fermée) suit celle du model de référence. A partir de la figure (III.5), le système asservi projeté (en boucle fermée) a une fréquence du gain unité $\omega_u = 1.01$ rad/s et une marge de phase $\phi_m = 48.46$. Et on remarque aussi que la fonction de transfert du système asservi projeté se comporte comme celle du model de référence pour une très large bande fréquentielle.

Conclusion :

Nous avons présenter une nouvel technique de réglage de $PI^\lambda D^\mu$, la validation de la méthode à été fait pour des déférent exemples, les résultat obtenu prouve qu'un $PI^\lambda D^\mu$ est plus flexible qu'un PID classique, d'une part ces résultat répond aux spécification temporelle des cahier des charges, d'autre part les résultat de la réponse fréquentielle en boucle ouvert est obtenu avec succès on remarquent la présence d'une phase plate autour de la fréquence de transition, cette résultat est obtenu à cause de l'utilisation d'un système désirer fractionnaire, ce qui conduit à un marge de phase constante et indépendante du gain du système, c'est l'idée introduit par bode qu'une phase contant conduit à un dépassement constant alors une propriété d'iso amortissement. En peut dire que les résultats obtenus est bonnes grâce aux bon choix de système désiré.

Commande du moteur à courant continu

IV.1 introduction

Comme application on a choisi la commande d'un moteur à courant continu. L'objectif de ce chapitre est d'utiliser le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ d'ordre fractionnaire dans la commande en position du moteur à courant continu et faire une étude comparatif de la robustesse du contrôleur $PI^\lambda D^\mu$ régler par la méthode proposée dans (III.4.1) avec un correcteur classique.

IV.2 modélisation du moteur à courant continu:

Un moteur à courant continu est un convertisseur d'énergie qui transforme de l'énergie électrique en énergie mécanique. C'est un grand classique des concours car il permet d'actionner une partie opérative en commandant la vitesse ou position de sortie. Ces moteurs sont utilisés dans de très larges domaines d'application et peuvent développer des puissances de Quelques watts à plusieurs dizaines de mégawatts. Ils sont constitués d'un bobinage ou aimant permanent fixe (excitation) créant un champ magnétique fixe ainsi que d'un circuit induit placé sur le rotor et alimenté électriquement par des balais glissants sur un collecteur. Ce système permet de créer un couple magnétique sur le rotor.

Les moteurs à courant continu interviennent souvent comme organe d'action dans le domaine des asservissements. On trouve principalement deux types de commande :

- Commande à flux constant par la tension d'induit variable
- Commande à courant d'induit constant par le flux d'induit variable.

Considérons le premier cas :

On considère un moteur à courant continu à excitation indépendante, tel que celui schématisé à la figure (IV-1).

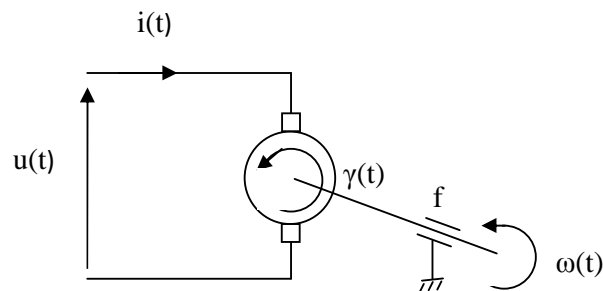


Figure IV-1 moteur à courant continu.

L'induit est modélisé de la manière suivante (en régime permanent, pas d'effet de la part de l'inductance).

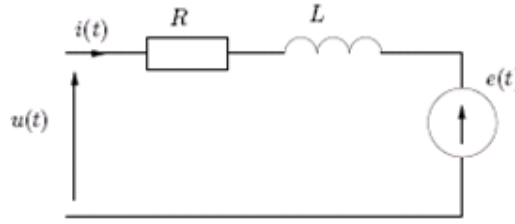


Figure IV-2 schéma d'un moteur à courant continu

L'équation électrique, liant la tension $u(t)$ aux bornes de l'induit (rotor) et le courant d'induit $i(t)$ s'écrit :

$$R i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t) = u(t) \quad (\text{IV.1})$$

Où R est la résistance de l'induit du moteur, L son inductance et $e(t)$ la force électromotrice, qui est proportionnelle à la vitesse de rotation du rotor :

$$e(t) = K_e \frac{d\theta}{dt} \quad (\text{IV.2})$$

L'équation mécanique rendant compte des couples agissant sur le rotor s'écrit :

$$\gamma(t) - f \frac{d\theta(t)}{dt} = J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \quad (\text{IV.3})$$

Où $\gamma(t)$ est le couple moteur, f le coefficient de frottement visqueux et J le moment d'inertie du rotor. Par construction, le couple $\gamma(t)$ est proportionnel au courant d'induit $i(t)$:

$$\gamma(t) = K_m i(t) \quad (\text{IV.4})$$

En règle générale les coefficients K_e et K_m sont si proches qu'il est raisonnable de les considérer égaux, négligeant alors les pertes durant la conversion électromécanique de puissance. On pose $K_{em} = K_e = K_m$.

L'équation (4.3) et (4.4) donnent :

$$K_{em} i(t) = f \frac{d\theta(t)}{dt} + J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} \quad (\text{IV.5})$$

Pour calculer la fonction de transfert, on utilise la transformée de Laplace, les conditions initiales sont supposées nulles, notons les transformés de Laplace : $\hat{\theta} = L(\theta(t))$, $I = L(i(t))$, $U = L(u(t))$.

$$(\text{IV.5}) \Rightarrow K_{em} I = (Jp^2 + fp)\hat{\theta} \Rightarrow \hat{\theta} = \frac{K_{em}}{p(Jp+f)} I \quad (\text{IV.6})$$

$$(\text{IV.1}) \Rightarrow U = (R + Lp)I + K_{em}p\hat{\theta} \Rightarrow I = \frac{1}{(R+Lp)} (U - K_{em}p\hat{\theta}) \quad (\text{IV.7})$$

A partir des relations (IV.6) et (IV.7) on peut déduire le schéma fonctionnel suivant pour le moteur à courant continu commandé par l'induit :

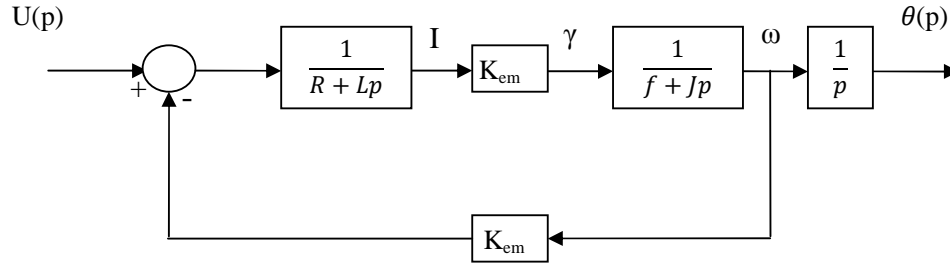


Figure IV-3 Schéma fonctionnel du moteur à courant continu

On notera la présence d'une boucle de contre-réaction intrinsèque au fonctionnement de cette machine due à la force électromotrice.

À partir de la figure (IV-3) on obtient La fonction de transfert du moteur à courant continu :

$$G(p) = \frac{\theta(p)}{U(p)} = \frac{\frac{K_{em}}{Rf + K_{em}^2}}{p \left[1 + \frac{RJ + Lf}{Rf + K_{em}^2} p + \frac{LJ}{Rf + K_{em}^2} p^2 \right]}$$

En général, pour un moteur à courant continu, on suppose que la self-inductance est négligeable et $Rf \ll K_{em}^2$, alors la fonction de transfert se réduit à :

$$G(p) = \frac{\theta(p)}{U(p)} = \frac{K}{p[1 + \tau_m p]} \quad (IV.8)$$

Avec :
$$K = \frac{1}{K_{em}} \text{ et } \tau_m = \frac{RJ}{K_{em}^2} \quad (IV.9)$$

τ_m : est la constante de temps électromécanique du moteur.

Remarque

-Pour une application pratique le concepteur fait l'acquisition du signal de réponse impulsionnelle puis appliquer directement la méthode décrit dans (III.4.1), donc il n'a pas besoin du modèle du moteur, mais puisque en fait seulement une simulation en à utilisé le modèle pour récupérer la réponse impulsionnelle et pour la simulation du système en boucle fermé.

-En pratique l'implémentation de la commande du moteur à courant continu nécessite l'utilisation d'un convertisseur continu-continu (hacheur), dans cette application en vas pas prendre en compte la présence de ce déniée, notre objectif est l'étude de la commande d'ordre fractionnaire sur un système dynamique et validée la méthode de réglage proposé.

IV.3 Synthèse du contrôleur

IV.3.1 cahier des charges

Considérons la fonction de transfert nominale d'un moteur à courant continu donné par [2.4]:

$$G(p) = \frac{16.89}{p[1+\frac{p}{50}]} \quad (IV.10)$$

Le système asservi projeté doit garantir les spécifications suivantes :

- la pulsation du gain unité en boucle ouvert $\omega_u = 500rad/sec$.
- marge de phase $\varphi_m = 45$.

Le modèle de référence qui répond à ces spécifications est donné par :

$$G(p) = \frac{1}{1+(\frac{p}{500})^{1.5}} \quad (IV.11)$$

Pour une étude comparative en vas utiliser un correcteur de type PID classique proposé par Oustaloup [2.4], le correcteur PID est et définie par la fonction de transfert suivante :

$$C_{PID}(p) = 728.7 \frac{(1+\frac{p}{4.0824})(1+\frac{p}{204.12})}{(1+\frac{p}{0.6804})(1+\frac{p}{1224.72})} \quad (IV.12)$$

IV.3.2 Résultat

Par l'application de la méthode décrit dans (III.4.1) on obtient le $PI^\lambda D^\mu$ suivant :

$$C(p) = 28.8342 + \frac{885.3888}{p^{0.6297}} + 11.1895 p^{0.5176} \quad (IV.13)$$

Pour utilisé ce correcteur en doit approximé sa fonction de transfert par la méthode décrit dans (II.5.2) sur la band fréquentielle $[10^{-2}\omega_u \quad 10^2\omega_u]=[5 \quad 5000]rad$, la fonction rationnelle résultante est :

$$\hat{C}(p) = 28.8342 + 8547.5 \frac{\prod_{i=0}^{21}(1+\frac{p}{0.0214(2.5119)^i})}{\prod_{i=0}^{22}(1+\frac{p}{0.0135(2.5119)^i})} + 1.0608 \frac{\prod_{i=0}^{21}(1+\frac{p}{0.0132(2.5148)^i})}{\prod_{i=0}^{21}(1+\frac{p}{0.0212(2.5148)^i})} \quad (IV.14)$$

Les spécifications obtenues sont :

- $\varphi_m=44.9^0$ et $\omega_u=500$ rad/sec par le correcteur fractionnaire (approximé $\hat{C}(p)$).
- $\varphi_m=50.9^0$ et $\omega_u=500$ rad/sec par le correcteur PID classique.

En remarque que les spécifications obtenues par le correcteur $PI^\lambda D^\mu$ sont très précise que celle obtenu par le PID classique. La figure (IV-4) représente le diagramme de bode du système en boucle ouvert pour les deux correcteur (C et C_{PID}) et la fonction idéale de bode (désirer).

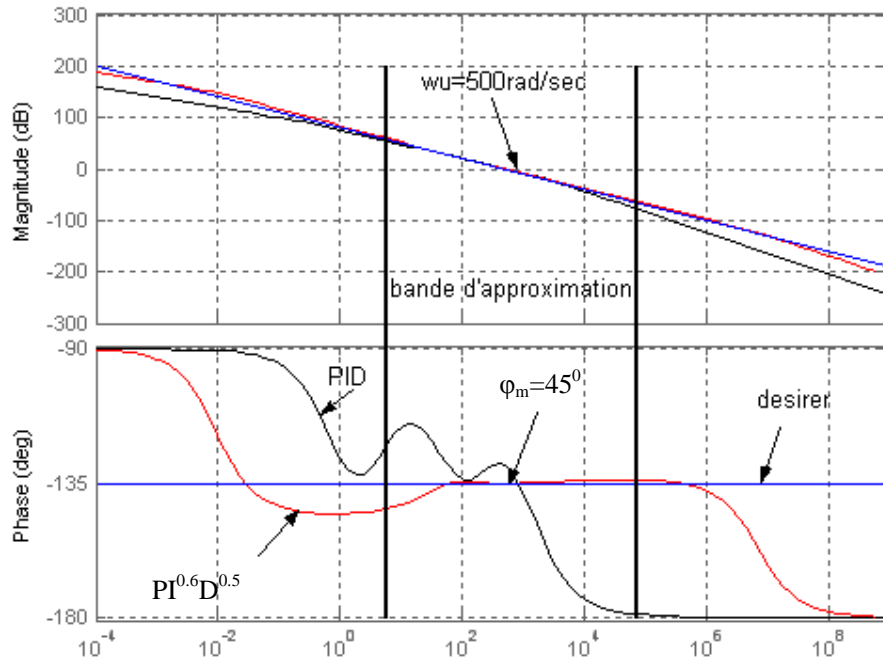


Figure IV-4 Tracer de bode de $C_{PID}G(p)$, $C(p)G(p)$ et de $\frac{1}{(\frac{p}{500})^{1.5}}$.

Le système en boucle ouverte avec le correcteur $C(p)$ à les caractéristiques suivante : le module est une droite de pente -30 db/dec , la marge de phase $\varphi_m=45^\circ$, donc le système en boucle fermée est stable, en remarque que la phase est constante autour de ω_u .

La figure (IV-5) représente la réponse temporelle du système en boucle fermée (avec le correcteur $C(p)$) pour une consigne θ_{ref} variable (10° , 4° et 15°), A partir de la figure (IV.5), on peut voir que la réponse temporelle du système asservi projeté suit celle du model de référence.

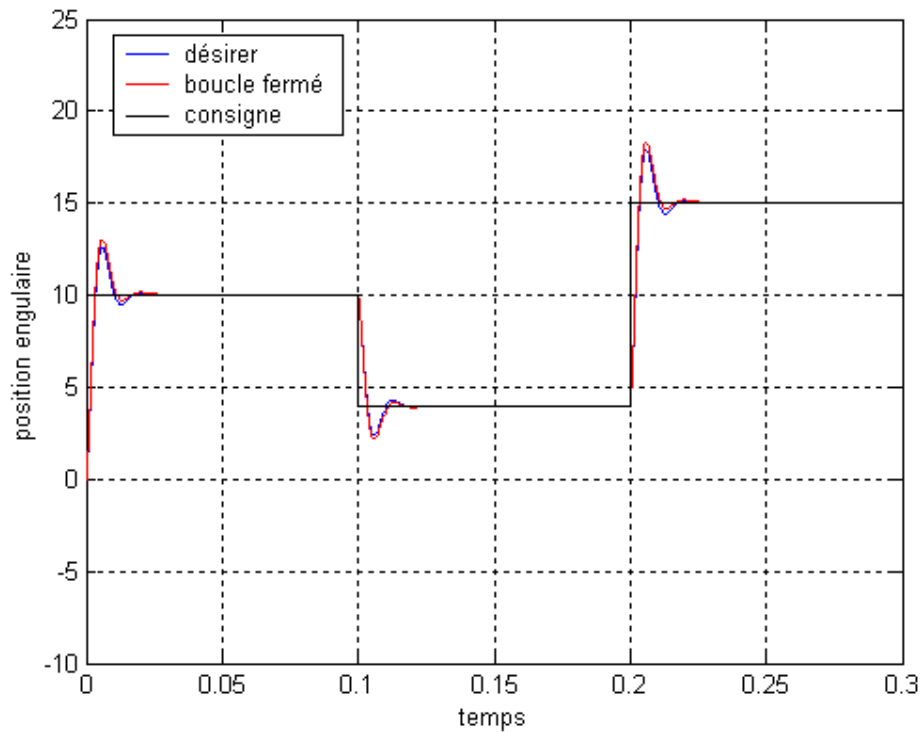


Figure IV-5 réponse temporelle du système boucle fermée et système désiré.

IV.4 Etude de la robustesse du contrôleur

Le modèle du moteur décrit dans (IV.8) est en fonction des deux paramètres K et τ_m qui sont eux-mêmes dépendants du composant interne du moteur, les valeurs de ces composantes peuvent varier à cause des effets extérieurs tels que changement de température, pression, hystérésis..., ce qui influence le système en boucle fermée. Dans cette section, nous étudions l'influence des perturbations structurelles sur les spécifications du système asservi projeté. Les résultats sont comparés avec ceux obtenus par le PID classique.

IV.4.1 variation du gain K

Dans cette partie, nous supposons que la constante τ_m est fixée à sa valeur nominale, pour étudier l'influence de la variation du gain K sur le système asservi. En faisant varier le paramètre K sur l'intervalle $[K/5 \ 5K] = [3.3780 \ 84.45]$ (c'est un intervalle très large), on obtient chaque fois la marge de phase et le dépassement correspondants en utilisant les deux correcteurs $C(p)$ et $C_{PID}(p)$. Les figures (IV-6) et (IV-7) représentent la réponse indicielle du système en boucle fermée pour les trois valeurs du gain suivantes $[K/5 \ K \ 5K]$ pour les deux correcteurs.

Les figures (IV-8) et (IV-9) montrent les variations de la marge de phase et du dépassement en fonction du paramètre K .

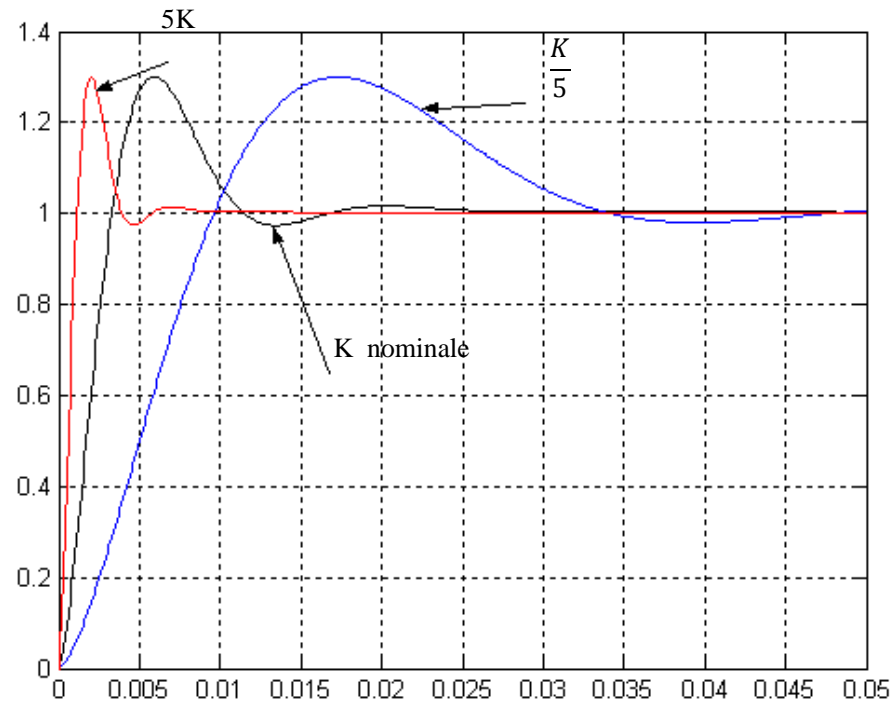


Figure IV-6. réponse indicielle du système en boucle fermée pour différent valeur de K ($PI^{0.6}D^{0.5}$).

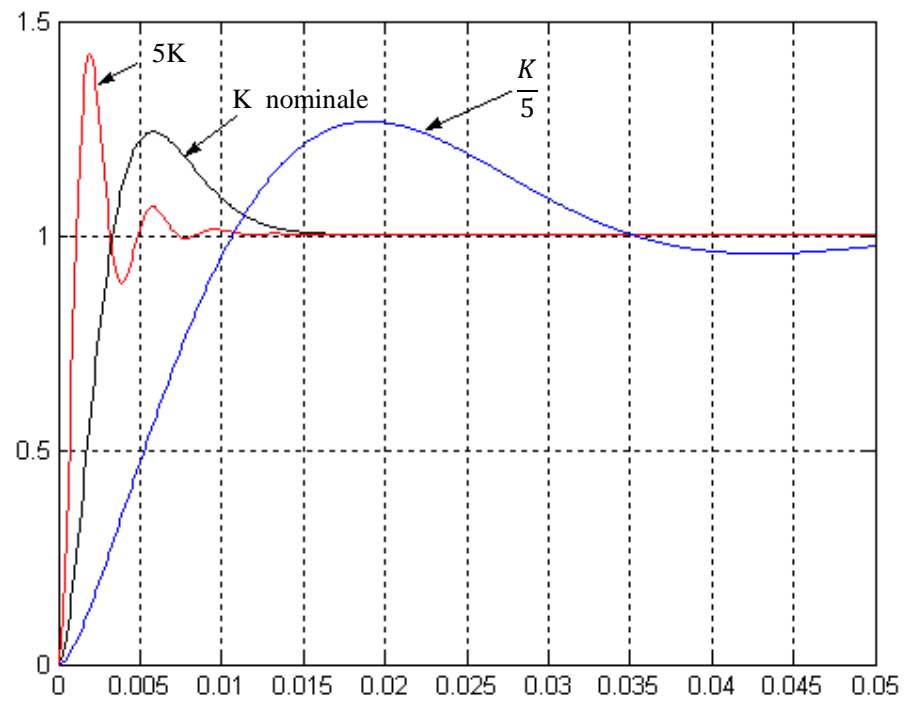


Figure IV-7. réponse indicielle du système en boucle fermée pour différent valeur de K (PID classique).

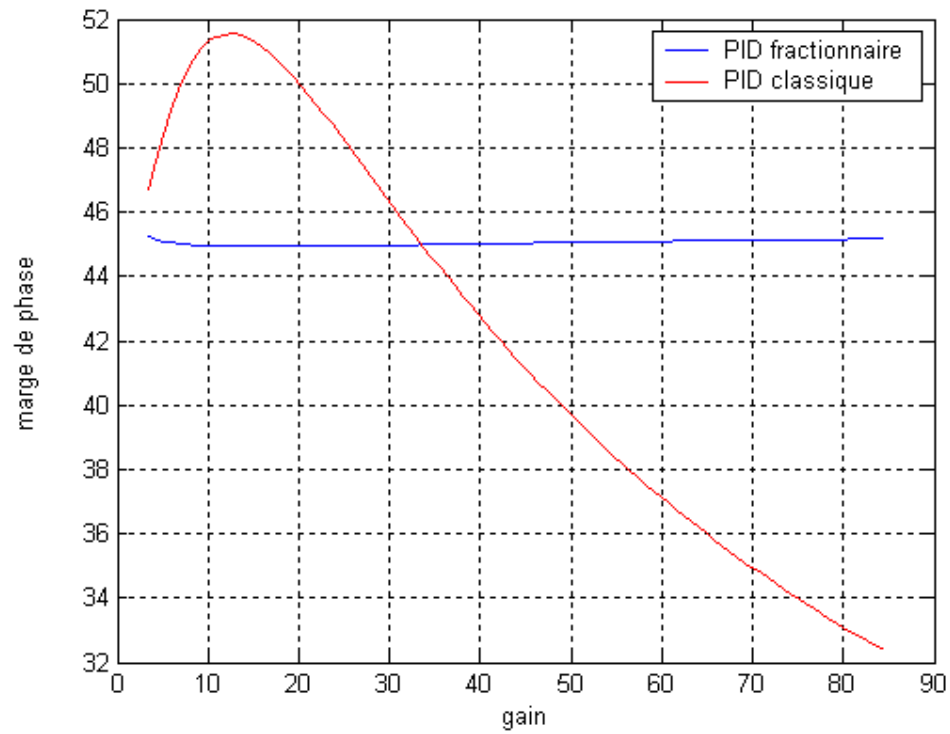


Figure IV-8 Variation de marge de phase en fonction de gain K.

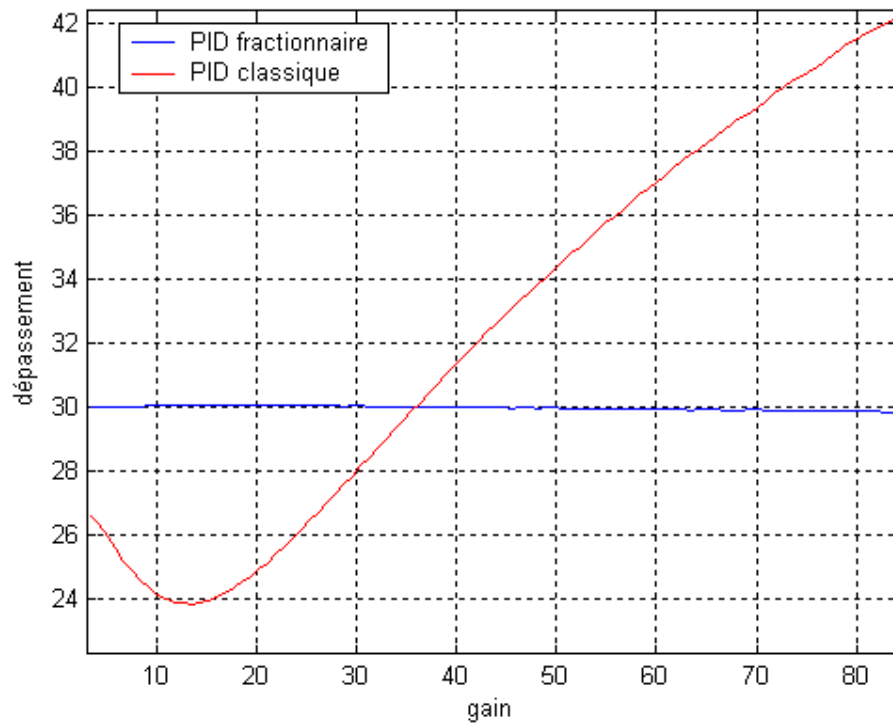


Figure IV-9 Variation de dépassement en fonction de gain K.

Pour quantifier les variations des performances données sur les figures précédentes, on calcule les erreurs relatives commises dans le cas de la de variation du gain K pour un temps de relaxation fixe en utilisant les formules suivantes :

$$Erreur(MP)\% = \frac{|MP_{max} - MP_{nom}|}{MP_{nom}} \quad (IV.14)$$

$$Erreur(D)\% = \frac{|D_{max} - D_{nom}|}{D_{nom}} \quad (IV.15)$$

MP_{max} et D_{max} sont respectivement les valeurs de la marge de phase et du dépassement dont les erreurs sont maximales par rapport à leurs valeurs nominales respectives MP_{nom} et D_{nom} . Les résultats sont représenté sur le tableau suivant :

Tab IV.1 Les différents caractéristiques pour K variant.

spécification caractéristique		Correcteur utilisé	
		$PI^{\lambda}D^{\mu}$	PID
Marge de phase	Variation maximal MP_{max}	45.2212 deg	32.362 deg
	intervalle de variation	[44.92 45.22] deg	[32.36 51.54]deg
	Erreur relative	0.67	36.54 %
Dépassement	Variation maximale	29.8363%	42.3207%
	intervalle de variation	[29.83 30.06] %	[23.8567 42.3207] %
	Erreur relative	0.76 %	75 %

Discussions et commentaires

Une variation sur le paramètre K implique une variation sur la pulsation de gain unité ω_u se qui modifié la bande passante du système et donc changer sa caractéristiques , ce ni pas le cas ou notre système est commander par le correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ tell que les résultats montrent q' on à obtient presque le même marge de phase $MP \cong 45^0$ et aussi le même dépassement $D\% \cong 30\%$ pour tout les valeurs de K , tell que MP et $D\%$ variée sur un intervalle très comme il est montrer par le tableau (IV.1) et les figures (IV-8) et (IV-9), en peut dire qu'on obtient un dépassement

indépendant du gain K ou bien un dépassement robuste et aussi un marge de phase robuste vis-à-vis les variations du gain, dans ce cas le système en boucle fermée à la propriété d'iso-amortissement. Cette propriété n'est pas satisfaite par le correcteur PID classique tel que la marge de phase et le dépassement varient sur les deux intervalles respectivement $[32.36 \ 51.54]$ et $[23.8567 \ 42.3207]$ comme il est montré sur le tableau (IV.1). En remarque aussi que les erreurs relatives obtenues par le correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ sont très petites (négligeables), contrairement à celles obtenues par le PID classique (erreurs importantes 36.54 % et 75%).

On peut dire que l'objectif de la méthode de réglage est atteint puisqu'elle est basée sur un système désiré robuste en degré de stabilité vis-à-vis les variations de gain comme nous avons vu dans la section (II.3.4). Les résultats obtenus montrent que le correcteur $PI^{\lambda}D^{\mu}$ est très robuste qu'un PID classique vis-à-vis les variations de gain du processus.

IV.4.2 variation de constante τ_m

Maintenant en considérant que le gain est fixé à sa valeur nominale $K=16.84$, pour étudier l'influence de la variation du temps constant τ_m , on fait varier le paramètre τ_m autour de sa valeur nominale de $\pm 50\%$ (sur l'intervalle $[0.5 \tau_m \ 1.5 \tau_m]$) en appliquant la même étude que nous avons faite pour le paramètre K . La figure (IV-10) représente la réponse indicielle du système en boucle fermée pour les valeurs de τ_m suivantes $[0.5 \tau_m, \tau_m$ et $1.5 \tau_m]$.

Les figures (IV-12) à (IV-14) montrent les variations de la marge de phase et de dépassement en fonction du paramètre τ_m , remarquons sur les figures suivantes que les spécifications (marge de phase et dépassement) dépendent du paramètre τ_m .

Remarque :

Notre correcteur est conçu de telle façon de rendre le système en boucle fermée équivalent à un système désiré robuste à la variation du gain, donc notre objectif est satisfait comme montré par l'étude précédente, l'étude suivante est faite pour démontrer l'influence de la variation de τ_m sur les spécifications du système en boucle fermée.

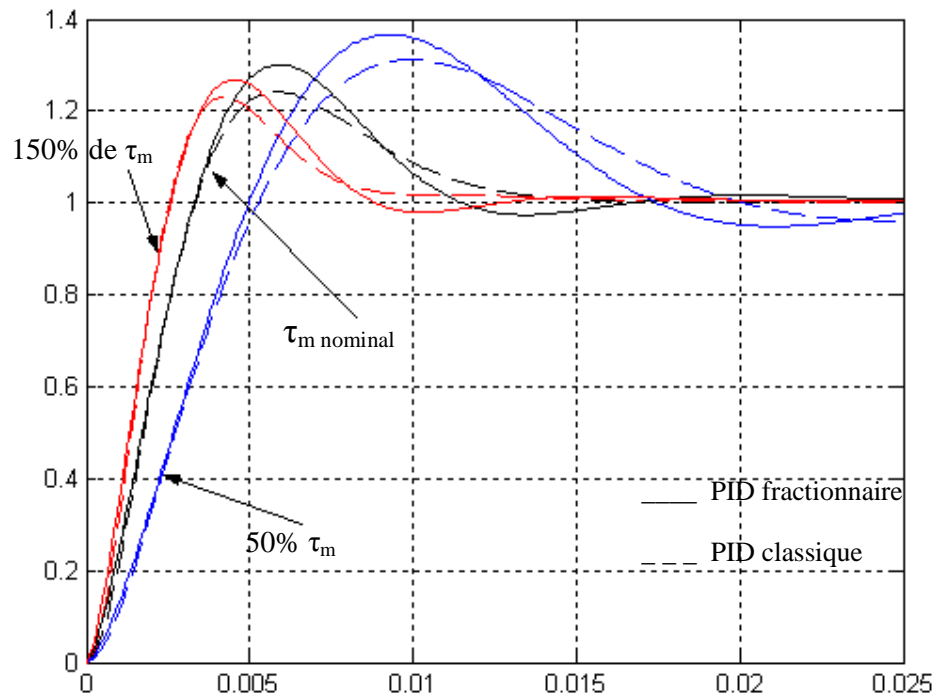


Figure IV-10 Réponse indicielle du système boucle fermée pour différentes valeurs de τ_m .

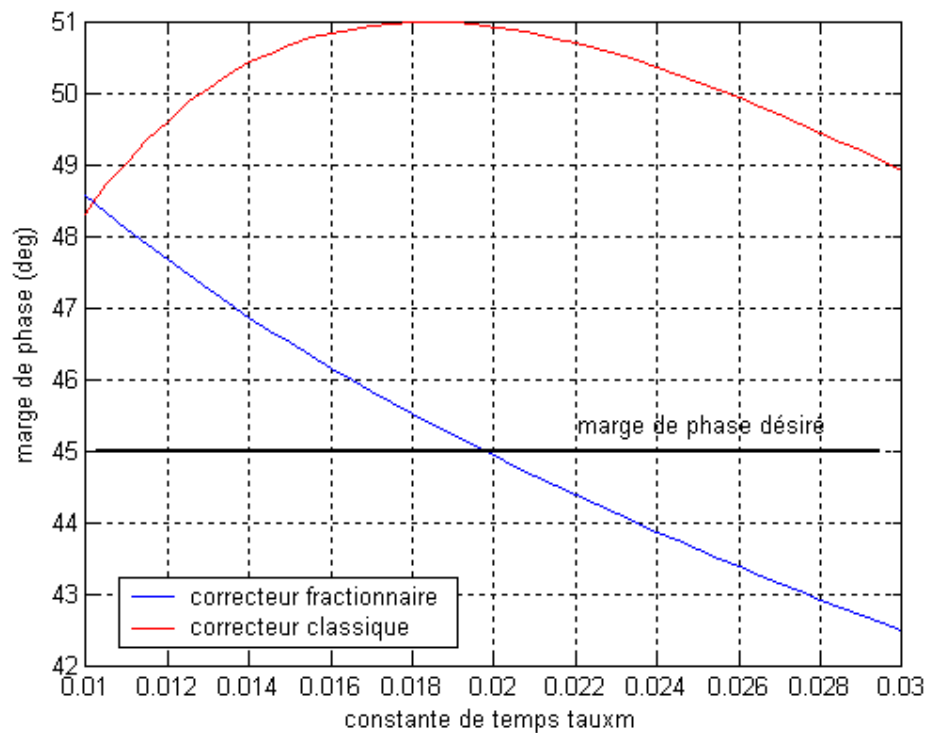


Figure IV-11 Variation de la marge de phase en fonction de τ_m .

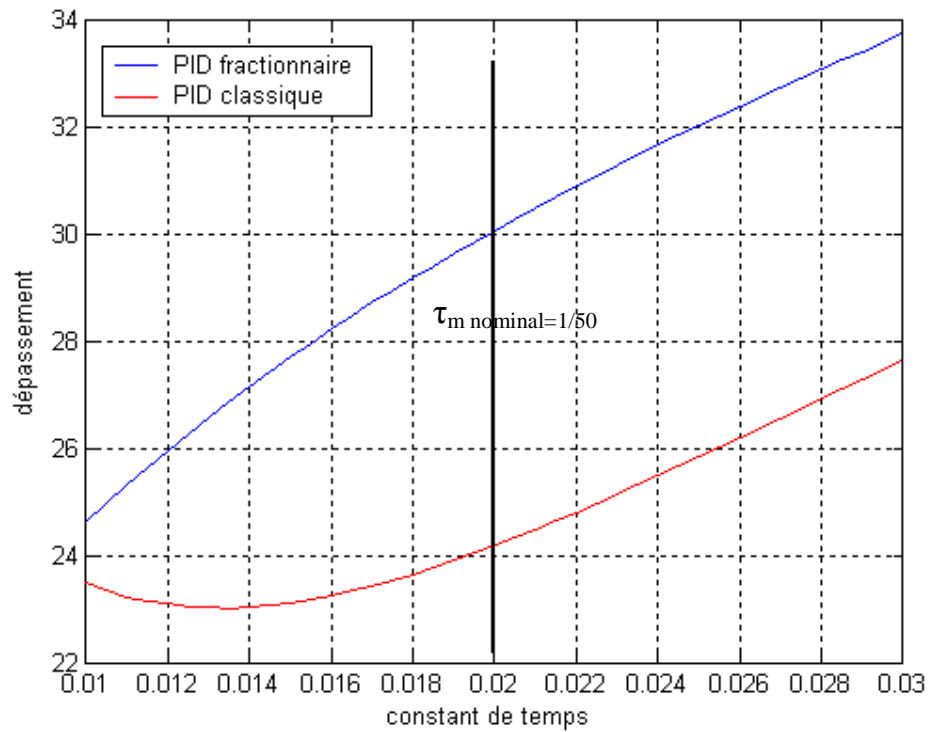


Figure IV-12 Variation de dépassement en fonction de τ_m .

Les résultats de L'étude des différentes caractéristiques est résumé sur le tableau suivant :

Tab IV.2 différents caractéristiques pour τ_m variant.

spécification caractéristique		Correcteur utilisé	
		PI ^λ D ^μ	PID
Marge de phase	Variation maximal	48.5782 deg	48.3126 deg
	intervalle de variation	[42.48 48.58] deg	[48.31 50.99] deg
	Erreur relative	8.12%	5.11%
Dépassement	Variation maximal	24.5975 %	27.6410 %
	intervalle de variation	[24.6 33.73] %	[23.01 27.64]%
	Erreur relative	18.17%	14.30 %

D'après les résultats qui nous avons vue sur le tableau (VI-2) en peut dire que le système Controller par le PID classique est moins dépend de paramètre τ_m que celle commander par le $PI^\lambda D^\mu$, mais de point de vue précision le $PI^\lambda D^\mu$ est bonne tell que les valeur nominal sont très proche des valeur désiré du cahier des charge et l'intervalle de variations est autour des valeurs désiré pour les deux spécifications étudiés.

IV.4.3 Variation de K et τ_m

En pratique généralement les deux paramètres variée en même temps, pour cela en fait variée les deux sur leur intervalles tell que en fait un bailliage bidimensionnelle du deux paramètre sur leur intervalle de variation en calculons pour chaque couple (K, τ_m) le dépassement correspondant, en obtient une matrice qui représente la variation de dépassement en fonction des deux paramètres. Les deux figure (IV-14) et (IV-15) représentent l'évolution de dépassement en fonction des deux paramètres K et τ_m pour les deux correcteur utilisé.

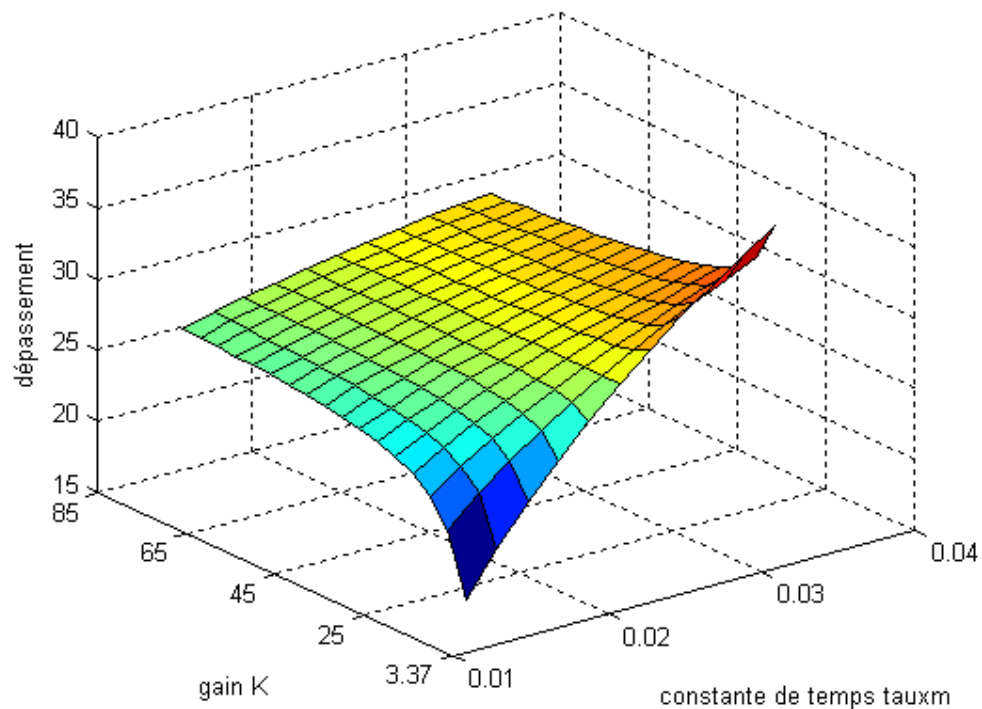


Figure IV-13 dépassement en fonction de K et τ_m (correcteur $PI^\lambda D^\mu$).

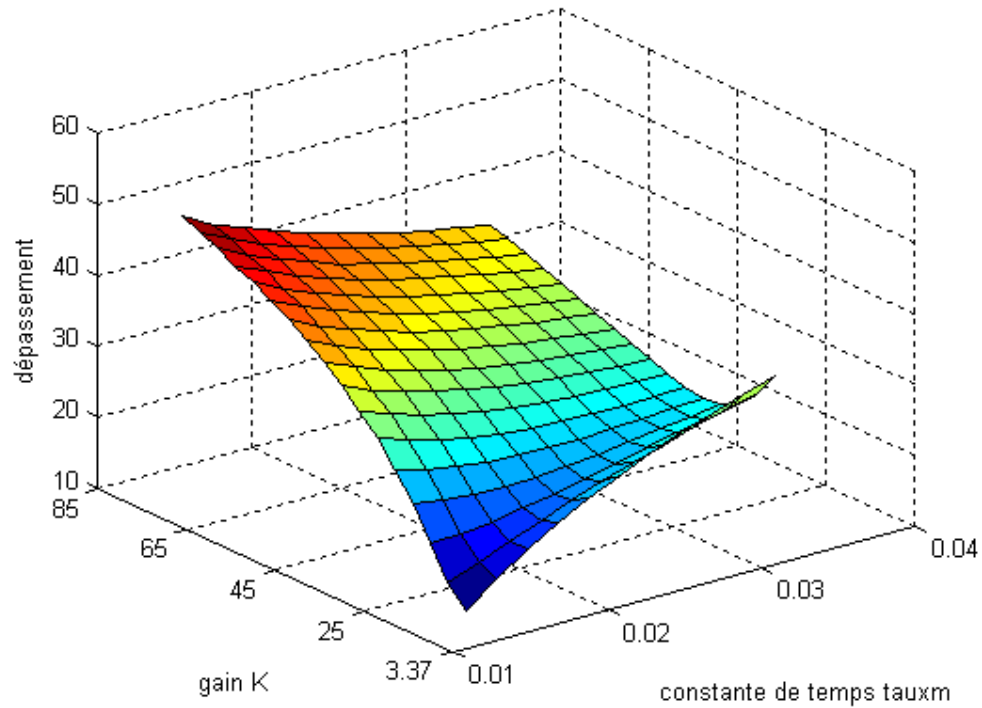


Figure IV-14 dépassement en fonction de K et τ_m (correcteur PID classique).

Les résultats de l'analyse des deux spécifications étudiées sont présentés sur le tableau suivant :

Tab IV.3 Les différentes caractéristiques (cas où K et τ_m varient)

spécification caractéristique		Correcteur utilisé	
		$PI^{\lambda}D^{\mu}$	PID
Marge de phase	Variation maximal MP_{\max}	55.0602 deg	24.9876 deg
	intervalle de variation	[38.83 55.06] deg	[24.9876 60.386] deg
	Erreur relative	22.57%	50.93 %
Dépassement	Variation maximal D_{\max}	17.69%	50.55 %
	intervalle de variation	[17.69 38.18] %	[13.35 50.55]%
	Erreur relative	41.15%	109.06 %

Les résultats montrent que le $PI^\lambda D^\mu$ est plus robuste qu'un PID classique.

IV.5 conclusion

Au cours de ce chapitre, l'intérêt de la commande d'ordre fractionnaire a été démontré, nous avons utilisé la commande de type $PI^\lambda D^\mu$ dans la commande en position du moteur à courant continu qui est très utilisé dans les processus industriels, le réglage de $PI^\lambda D^\mu$ est fait par la méthode proposée dans (III.3.3), la réalisation d'un contrôleur fractionnaire bornée en fréquence a été faite par la méthode décrite dans (II.5.2) et (I.4.5), puis une étude de robustesse a été faite, les résultats obtenus montrent l'efficacité et la robustesse du contrôleur $PI^\lambda D^\mu$.

Conclusion générale

Aujourd'hui, plusieurs chercheurs s'intéressent au développement des méthodes et techniques de réglage du correcteur $PI^\lambda D^\mu$. L'intérêt pour ce type de correcteur est justifié par une meilleure flexibilité dans la conception de la commande puisqu'il a deux paramètres en plus qui sont les ordres fractionnaires des actions d'intégration et de dérivation.

Alors, le but de ce travail est de présenter une nouvelle méthode simple pour le réglage du correcteur $PI^\lambda D^\mu$ afin de satisfaire des spécifications en boucle fermée donnée.

Les travaux réalisés et les résultats obtenus pour le réglage de ce correcteur sont basés sur une réponse désirée en boucle fermée, telle que selon des spécifications données en choisissant un système désiré d'ordre fractionnaire qui satisfait ces spécifications, ce choix est basé sur l'analyse qui nous avons présentée sur le chapitre II, le réglage des cinq paramètres du $PI^\lambda D^\mu$ est fait de telle façon à rendre le système en boucle fermée équivalent au système désiré, pour valider cette technique sur un système dynamique réel en choisissant la commande du moteur à courant continu, l'analyse de robustesse a été faite pour des variations structurées sur le modèle du moteur en comparant les résultats avec ceux obtenus par un PID classique. Les résultats qui nous avons obtenus montrent l'efficacité de notre technique et aussi montrent l'apport de performances additionnelles et une propriété de robustesse très importante par l'utilisation du correcteur $PI^\lambda D^\mu$.

Dans ce travail la méthode de réglage de $PI^\lambda D^\mu$ est basée sur la réponse impulsionnelle du processus, alors comme perspective, on suggère l'amélioration de cette méthode de telle façon à exploiter la réponse indiciale du processus qui est simple à récupérer et simplifiée en plus la méthode afin de faire une extension dans le monde industriel du PID classique au $PI^\lambda D^\mu$ fractionnaire.

References

- [1.1] Vinagre .B.M., Feliú .V, proc:41st IEEE conference on decision and control (Las Vegas, December 9, 2002).
- [1.2] Podlubny .Igor, Geometric and Physical Interpretation of Fractional Integration and Fractional Differentiation,' Fractional calculus and applied analysis, 5, N° 4, 2002.
- [1.3] Charef. A, Sun. H, Tsao .Y.Y, Onaral .B, Fractal System as Represented by Singularity Function, IEEE Trans. on Automatic Control, vol.37, N°9, September 1992.
- [1.4] Petras .I, Podlubny .I, O'Leary.P, Dorcak.,L, and Vinagre. B. M., Analogue Realization of Fractional Order Controllers," Fakulta Berg , TU Kosice, 2002.
- [1.5] Oustaloup .A , Systèmes asservis linéaires d'ordre fractionnaire : théorie et pratique, Editions Masson, Paris, 1983.
- [1.6] Oustaloup .A , La dérivation non entière. Hermès. Paris, 1995.
- [2.1] Filipe, un nouveau concept pour la commande robuste.
- [2.2] Assabaa.M, Charef.A, Modeling and analysis of Multiple fractional order systems, CGE'05,16 avril 2007,EMP Bordj-El-Bahri,Alger.
- [2.3] Assabaa.M, modélisation et analyse des équations différentielles d'ordre fractionnaire, Mémoire de magister, université de mentouri, constantine, 2006.
- [2.4] Oustaloup .A, La robustesse. Hermès. Paris, 1995.
- [2.5] Barbosa .R. S et al, Tuning and Application of Integer and Fractional Order PID Controllers, Springer Science+Business Media B.V. 2009.
- [3.1] Ziegler, J.G., and N.B.Nichols (1942), Optimum Settings for Automatic Controllers. Transactions of the A.S.M.E. Vol. 64, N° 8, pp 759-768
- [3.2] Podlubny. I, (1999), Fractional Order Systems and $PI^\lambda D^\mu$ Controllers , IEEE Transactions on Automatic Control, 44(1), pp 208–214
- [3.3] Djouambi. A, Charef. A. and Bouktir.T, Fractional Order Robust Control and $PI^\lambda D^\mu$ Controllers" WSEAS TRANSACTIONS on CIRCUITS and SYSTEMS, Issue 8, Volume 4, pp 850-857, 2005.
- [3.4] Monje .C. A et al PROPOSALS FOR FRACTIONAL $PI^\lambda D^\mu$ TUNING, Proc. of the 1st IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its applications FDA'04 Bordeaux, France, July 19-21, 2004.
- [3.5] Duarte Valério and José Sà da Costa, Tuning of fractional PID controllers with Ziegler–Nichols type rules, Signal Processing, 86, 2006, pp 2771-2784.
- [3.6] Ramasamy.M and Sundaramoorthy .S, PID controller tuning for desired closed-loop

- responses for SISO systems using impulse response, *Computers and Chemical Engineering*, xxx, (2007), pp xxx–xxx
- [3.7] Charef. A, Analogue realisation of fractional order integrator, differentiator and fractional $PI^\lambda D^\mu$ controller, *IEE Proc. Control Theory Appl.*, Vol. 153, No. 6, 2006, pp 714-720.
- [3.8] Charef. A, Modeling and Analog Realization of the Fundamental Linear Fractional Order Differential Equation, *Nonlinear Dynamics*, Vol. 46, N° 1&2, 2006, pp 195–210
- [3.9] Monje, C. A, Design Methods of Fractional Order Controllers for Industrial Applications, PHD thesis, Universidad de Extremadura, 2006.
- [3.10] Djouambi, A, Contribution à la Commande CRONE, Thèse de Doctorat, Université Mentouri, Constantine, 2008
- [3.11] Caponetto, R. and Fortuna, L., A new tuning strategy for a non integer order PID controller, : Proc. of the 1st IFAC Workshop on Fractional Differentiation and its applications, FDA'04 Bordeaux, France, July 19-21, 2004
- [3.12] Bettou.K et al, A New design method for fractional $PI^\lambda D^\mu$ controller, *IJ-STA*, vol.2, N°1, July 2008, pp :414-429.
- [3.13] Monje.C.A, Vinagre.M et al ,Tuning and auto-tuning of fractional order controllers for Industry application, *control engineering practice*, 16, 2008, pp 798-812.
- [4.1] Bidan.P , commande diffusive d'une machine électrique une introduction, proc : ESAIM 1998, vol.5, pp :55-68. disponible sur : <http://www.emath.fr/proc/Vol.5/>

Abstract:

This work primarily concerns the techniques of the tuning of fractional order controller, we proposed a new tuning techniques are proposed for the fractional order $PI^\lambda D^\mu$ controller which consists in returning the closed loop system equivalent to a desired system of a fractional nature, , like an example of application one to used the $PI^\lambda D^\mu$ controller to regulate by the proposed method in the order in position of the DC motor, the results obtained are compared with this one obtained with a classical PID for shown the effectiveness, the robustness and the interest of the use of $PI^\lambda D^\mu$ control .

ملخص:

هذا العمل يختص في تقنيات ضبط المراقب $PI^\lambda D^\mu$ ذو الأساس الجزئي ، لقد اقترحنا في هذا للعمل طريقة جديدة تعتمد على جعل النظام ذو الحلقة المغلقة متوافقا مع نظام مرغوب فيه ذو أساس الجزئي بحيث النظام المرغوب يحقق الشروط المطلوبة ، كمثال تطبيقي استعملنا المراقب الجزئي المضبوط بالطريقة المقترحة من أجل التحكم في زاوية الدوران للمحرك ذو التيار المستمر ، و لقد قمنا بمقارنة النتائج المتحصل عليها مع النتائج المتحصل عليها باستعمال المراقب PID المؤلف من أجل إظهار مدى فاعلية و متانة المراقب الجزئي وتوضيح الفائدة من استعماله .